Занятие 2. Метод математической индукции

Теория

Задача

Докажите утверждение:

$$\forall n\ n \in \mathbb{N} \implies 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Доказательство Докажем методом математической индукции:
База:

$$1 = \frac{1(1+1)}{2} = 1$$

Переход:

$$1+2+\cdots+n+(n+1) = \frac{n(n+1)}{2}+(n+1) = \frac{n(n+1)}{2}+\frac{2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

Арифметика Пено

В математике арифметика аксиоматически определяется индуктивно.

1. $1 \in \mathbb{N}$
2. $\forall x\ x \in \mathbb{N} \implies S(x) \in \mathbb{N}$
3. $\forall x\ x \in \mathbb{N} \implies S(x) \neq 1$
4. $\forall a \forall b\ (S(a) = S(b)) \implies (a = b)$
5. $(P(1) \wedge (\forall n\ n \in \mathbb{N} \implies (P(n) \implies P(S(n))))) \implies (\forall n\ n \in \mathbb{N} \implies P(N))$

Аксиома 5 - аксиома математической индукции.
Сложение определяется следующим образом:

1. $x + 1 = S(x)$
2. $a + S(b) = S(a + b)$

Докажем следующее утверждение из аксиом.
Доказать

$$\forall n\ n \in \mathbb{N} \implies 1 + a = a + 1$$

Доказывать будем методом математической индукции (используя 5 аксиому).
Доказательство
База:

$$1 + 1 = 1 + 1$$

Переход:

$$1 + S(a) = S(1 + a) = S(a + 1) = S(S(a)) = S(a) + 1$$

Задания

1. Любое ли целое количество рублей, большее семи, можно уплатить без сдачи денежными купюрами по 3 и по 5 рублей? Почему?

2. Докажите что $\forall n \; n \in \mathbb{N} \implies (4^n - 1) \vdots 3$

3. Докажите, что в игре "Ханойская башня"для n колец достаточно $2n - 1$ перекладывания.

4. Клетки доски 100×100 раскрашены в 4 цвета так, что в каждом квадратике 2×2 встречаются клетки всех цветов. Докажите, что и среди угловых клеток встречаются клетки всех цветов.

5. Докажите, что

$$1 + 4 + 9 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

6. Плоскость поделена на части несколькими прямыми. Докажите, что эти части можно раскрасить в черный и белый цвет так, чтобы любые две соседние части были раскрашены в различные цвета (соседние части – это те, которые имеют общий участок границы).

7. Докажите в арифметике Пеано, что $a + b = b + a$

Домашнее задание

1. Докажите, что

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \cdots + (n-1)n = \frac{(n-1)n(n+1)}{3}$$

2. Плоскость разрезана на части n прямыми, где $n > 3$ и не все прямые проходят через одну точку. Докажите, что хотя бы одна из частей – треугольник.

3. На плоскости даны n прямых *общего положения* (это значит, что никакие две не параллельны и никакие три не проходят через одну точку). На сколько частей они разбивают плоскость?

4. Докажите в арифметике Пеано:

$$2 + 2 = 4$$

   приняв что:

$$2 = S(1)$$
$$3 = S(2)$$
$$4 = S(3)$$