Идея чётности

1. Запишите в строчку пять чисел так, чтобы сумма любых двух соседних чисел была чётная, а сумма всех чисел была нечётная.
2. Существует ли
   a. чётное число, сумма цифр которого нечётна?
   b. чётное число, произведение цифр которого нечётно?
3. Кто-то написал на доске в некотором порядке 2022 плюса и 2023 минуса. Время от времени ученики подходят к доске, стирают любые два знака и пишут вместо них один, причем, если перед этим были стерты одинаковые знаки, то вместо них пишется плюс, а если разные – минус. После нескольких таких действий на доске остался только один знак. Какой?

Идея чётности

1. Можно ли замостить шахматную доску 8 x 8 доминошками 1 x 2, если
   a. Из доски вырезали клетку a1
   b. Из доски вырезали клетки a1 и h8
   c. Из доски вырезали клетки a1 и h1
2. Загаданы три целых числа a, b, c. Разрешается выбрать любые два из них и спросить: их произведение чётное или нечётное? Всегда ли с помощью таких вопросов можно узнать, чётно или нечётно число b?
3. Загаданы три целых числа a, b, c. Разрешается выбрать любые два из них и спросить: их сумма чётная или нечётная? Всегда ли с помощью таких вопросов можно узнать, чётно или нечётно число b?

Идея чётности

1. Петя закрасил одну клетку прямоугольника. Саша может закрашивать другие клетки этого прямоугольника по следующему правилу: можно красить любую клетку, у которой нечётное число закрашенных соседей (по стороне). Сможет ли Саша закрасить все клетки прямоугольника (независимо от того, какую клетку выбрал Петя), если размеры прямоугольника
   a. 8 на 9 клеток
   b. 8 на 10 клеток
2. В одной куче 18 конфет, а в другой – 23. Нина и Аня играют в игру: одним ходом можно съесть одну кучу конфет, а другую разделить на две кучи. Проигравшим считается тот, кто не может сделать ход, т.е. перед ходом которого имеются две кучи из одной конфеты. Кто выигрывает при правильной игре, если начинает Аня?
3. Шахматная доска размером 6 х 6 покрыта 18 костями домино размером 1 х 2. Докажите, что при любом таком покрытии можно разрезать доску на две части по горизонтальной или вертикальной линии, не повредив ни одной кости домино.

Принцип Дирихле

1. Пятеро молодых рабочих получили на всех зарплату – 1500 рублей. Каждый из них хочет купить себе магнитофон ценой 320 рублей. Докажите, что кому-то из них придется подождать с покупкой до следующей зарплаты.
2. Докажите, что, если 21 человек собрали 200 орехов, то есть два человека, собравшие поровну орехов.
3. Имеется 101 пуговица одного из 11 цветов. Докажите, что либо среди этих пуговиц найдутся 11 пуговиц одного цвета, либо 11 пуговиц разных цветов.
4. На плоскости нарисовано 12 прямых, проходящих через точку О. Докажите, что можно выбрать две из них так, что угол между ними будет меньше 17 градусов.

Принцип Дирихле

1. Внутри правильного шестиугольника со стороной 1 расположено 7 точек. Докажите, что среди них найдутся две точки на расстоянии не больше 1.
2. В тёмной комнате стоит ящик.
   a. В ящике лежат 5 пар чёрных и 5 пар белых носков. Какое минимальное количество носков надо достать из ящика, чтобы среди них точно нашлась бы пара носков одного цвета?
   b. В ящике лежат 5 пар чёрных и 5 пар белых перчаток. Какое минимальное количество перчаток надо достать из ящика, чтобы среди них точно нашлась бы пара перчаток одного цвета? (Перчатки бывают левые и правые)
3. Решите следующие задачи
   a. Какое наибольшее число полей на доске 8 х 8 можно закрасить в черный цвет так, чтобы в каждом уголке из трих полей было по крайней мере одно не закрашенное поле?
   b. Какое наименьшее число полей на доске 8 х 8 можно закрасить в черный цвет так, чтобы в каждом уголке из трех полей было по крайней мере одно черное поле?

Принцип Дирихле

1. В Москве живёт более десяти миллионов жителей.
   a. Докажите, что среди них найдутся не менее 20 тысяч человек, которые празднуют свой день рождения в один и тот же день.
   b. Известно, что на голове не более 150000 волос. Какое максимальное число людей с одинаковым числом волос можно гарантировать?
2. 65 конфет разделили между 12 школьниками. Доказать, что по крайней мере 2 из них получили конфет поровну (возможно, 0).
3. Имеется 20 гирь, каждая из которых весит целое число граммов. Известно, что нельзя, отложив в сторону некоторые из гирь (возможно, ни одной), разделить оставшиеся на 2 кучи равного веса. Доказать, что общий вес гирь превосходит 1 тонну.

Принцип Дирихле

1. Доказать, что из (n + 1) числа, меньшего 2n, всегда можно выбрать 2, одно из которых делится на другое.
2. Докажите, что среди любых 6 человек есть либо трое попарно знакомых, либо трое попарно незнакомых.
3. В классе 25 учеников. Известно, что среди любых трёх из них найдутся двое, которые дружат между собой. Докажите, что в классе есть ученик, у которого не менее 12 друзей.