Принцип Дирихле

В.В. Вавилов, профессор СУНЦ МГУ

При решении самых различных задач часто бывает полезен так называемый «принцип Дирихле», названный в честь немецкого математика Петера Густава Лежена Дирихле (1805 – 1859); по-другому этот принцип еще называют «принципом ящиков» или « принципом голубятни». Этот принцип часто является хорошим средством при доказательстве важнейших теорем в теории чисел, алгебре, геометрии. В школе им. А.Н. Колмогорова знакомство с этим принципом происходит на уроках алгебры и геометрии; кроме того, соответствующие материалы используются и для проведения семинара по олимпиадным задачам. Отметим также, что эта тема стоит в общем ряду при изучении других важнейших принципов: принцип исключенного третьего, метод математической индукции, принцип включения-исключения, принцип суперпозиции, принцип непрерывности (в геометрии, в частности), принцип двойственности.

Наиболее часто принцип Дирихле формулируется в одной из следующих форм:

Если пять кроликов помещены в четыре клетки, то в одной из клеток находятся не менее двух кроликов; или, другими словами, нельзя посадить пять кроликов в четыре клетки так, чтобы в каждой клетке находилось не более одного кролика.

В более общей форме этот принцип выглядит так: если $(n+1)$ кролик помещен в n клетках, то имеется клетка, в которой находятся не менее двух кроликов.

Это простое утверждение можно обобщить: если $(2n+1)$ кролик помещен в n клетках, то, по крайней мере, в одной клетке находятся не менее трех кроликов.

Более общая форма принципа Дирихле, включающая все предыдущие, такова:

Если $(kn + 1)$ кролик помещен в n клетках, то в одной из клеток находятся не менее $(k + 1)$ кролика; или в эквивалентной форме — нельзя посадить $(kn + 1)$ кролика в n клеток так, чтобы в каждой клетке находилось не более k кроликов.

Принцип Дирихле почему-то принято излагать именно на языке кроликов или голубей и клеток, а его иллюстрация делается зачастую при решении следующей задачи.

Задача 1. В Москве (в любом другом мегаполисе) более 10,1 млн. жителей, на голове у каждого не больше 100 000 волос. Докажите, что имеются, по крайней мере, 100 человек с одинаковым числом волос на голове.

Решение. Действительно, выдадим каждому человеку ярлык, на котором написано число волос на его голове (таких ярлыков не больше 100 000). Разобьем теперь все население города на группы, в каждую из которых входят люди с одинаковым числом на голове. Если теперь предположить, что в каждой группе меньше 100 человек, то это будет означать, что всего в городе не больше 1,0 млн. человек, что противоречит условию задачи.

Отметим, что при решении этой задачи мы фактически доказали принцип Дирихле, где в качестве «клеток» служат группы людей с одинаковым числом волос, а в качестве «кроликов» — жители города.

Задача 2. Докажите, что из любых двенадцати натуральных чисел можно выбрать два, разность которых делится на 11.

Решение. При делении двенадцати чисел на 11 могут получиться следующие остатки: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10. По принципу Дирихле, таким образом, найдутся два числа, которые при делении на 11 дадут одинаковые остатки. Разность этих двух чисел делится на 11.

Задача 3. (*Ленинградская и др. олимпиады*) Можно ли в клетках квадратной таблицы 5×5 расставить числа 0, +1, –1 так, чтобы все суммы в каждом столбце, в каждой строке и на каждой из двух диагоналей были различны?

Решение. Если предположить, что такая расстановка чисел 0, +1, –1 возможна, то из этих чисел можно составить $12 = 5 + 5 + 2$ различных сумм чисел. Но из чисел 0, +1, –1 можно составить только 11 их сумм, причем наименьшее из них равно $5\cdot(-1)$, а наибольшее равно $5\cdot(+1)$; при этом все такие суммы являются целыми числами. Поэтому расставить числа требуемым способом нельзя.

Задача 4. В ряд выписано пять натуральных чисел: a_1, a_2, a_3, a_4, a_5. Докажите, что либо одно из них делится на 5, либо сумма нескольких рядом стоящих чисел делится на 5.

Решение. Рассмотрим пять чисел:

$$a_1, \quad a_1+a_2, \quad a_1+a_2+a_3, \quad a_1+a_2+a_3+a_4, \quad a_1+a_2+a_3+a_4+a_5.$$

Если одно из них делится на 5, то доказывать нечего. В противном случае, при делении на число 5 они дают в остатке какие-то из четырех чисел: 1, 2, 3, 4. По принципу Дирихле остатки, по крайней мере, двух из выписанных пяти чисел совпадут. Разность этих чисел, тем самым, также делится на 5. Но эта разность — одно из чисел, данных в задаче, или сумма нескольких из них, стоящих рядом.

Задача 5. Имеется шесть точек на плоскости, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Тем самым, имеется $C_6^2 = 15$ отрезков, которые эти точки соединяют попарно.

Предположим, что все пятнадцать отрезков окрашены либо в красный, либо в синий цвет. Докажите, что найдется, по крайней мере, один хроматический треугольник, т. е. такой, все стороны которого окрашены в один цвет.

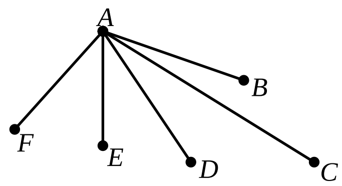

Рис. 1

Решение. Выберем какую-либо точку A и рассмотрим пять отрезков AB, AC, AD, AE, и AF, которые содержат A (рис.1).

По принципу Дирихле, по крайней мере, три из этих пяти отрезков окрашены в один (например, красный) цвет. Пусть это отрезки AB, AC, AD (это не приводит к потере общности, т. к. мы всегда можем переобозначить точки). Выбор цвета также не играет роли, так как, перекрасив все отрезки синего цвета в красный и наоборот, мы получим другую раскраску, никак не влияющую на ситуацию с существованием одноцветного треугольника.

Рассмотрим треугольник BCD (рис. 2). Имеется две возможности: или все его стороны синие, или, по крайней мере, одна из его сторон красная. В первом случае треугольник BCD искомый, а во втором – если, например, сторона BC красная, то треугольник ABC хроматический.

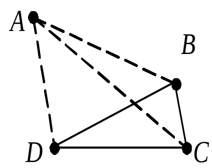

Рис. 2

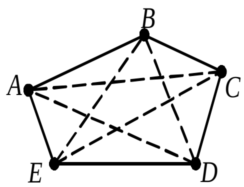

Рис. 3

Число шесть является наименьшим числом, которое обеспечивает существование хроматического треугольника, так как на рис. 3 нельзя выбрать хроматического треугольника, если стороны пятиугольника покрашены в один цвет, а его диагонали – в другой.

Замечание. Задачу 5 можно интерпретировать и так: в любой компании из шести человек можно выделить трех, которые между собой знакомы, или таких, которые между собой незнакомы.

Задача 6. На каждой стороне выпуклого четырехугольника, как на диаметре, построен круг. Докажите, что эти четыре круга полностью покрывают четырехугольник.

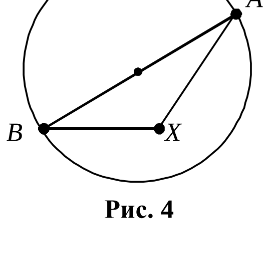

Рис. 4

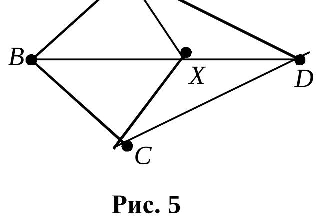

Рис. 5

Решение. Для решения заметим сначала, что точка X лежит внутри круга диаметра AB или на его границе тогда и только тогда, когда $\angle BXA \geq \pi/2$ (рис. 4. Как это доказать?).

Теперь рассмотрим произвольную точку X внутри четырехугольника $ABCD$ (рис. 5) и соединим ее со всеми вершинами. Тогда среди углов $\angle AXB$, $\angle BXC$, $\angle CXD$, $\angle DXA$ найдется, по крайней мере, один не меньший $360°/4 = 90°$, а это и означает, что один из четырех кругов будет покрывать точку X.

Задача 7. Равносторонний треугольник ABC и квадрат $MNPQ$ вписаны в окружность длины L. Ни одна из вершин треугольника не совпадает с вершинами квадрата. Их вершины делят окружность на семь частей (рис. 6). Докажите, что, по крайней мере, одна из них имеет длину не больше $\mathrm{L}/24$.

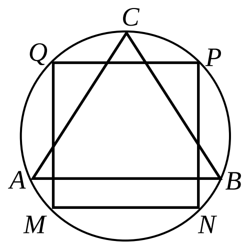

Рис. 6

Решение. По принципу Дирихле на одной из дуг, на которые делят окружность вершины треугольника, попадают две вершины квадрата; пусть, например, это будут вершины M и N.

Заметим, что $l(AB) = \dfrac{L}{3}$ и $l(MN) = \dfrac{L}{4}$. Тогда $l(AM) + l(NB) = \dfrac{L}{3} - \dfrac{L}{4} = \dfrac{L}{12}$, где $l(XY)$ обозначает длину дуги XY. Но тогда, по крайней мере, одна из длин дуг $\overset{\smile}{AM}$ или $\overset{\smile}{NB}$ не превосходит $L/24$, что и требовалось доказать.

Задача 8. (*Ленинградская олимпиада*.) Треугольник разрезан на несколько выпуклых многоугольников. Докажите, что среди них либо есть треугольник, либо есть два многоугольника с одинаковым числом сторон.

Решение. Выберем среди многоугольников разбиения тот, у которого наибольшее число сторон (если таких более одного, то доказывать нечего). Он выпуклый и поэтому может иметь с каждым из остальных многоугольников не более одной общей стороны (или ее части), и на каждой стороне исходного треугольника лежит не более одной его стороны. Пусть число его сторон n. Тогда на сторонах треугольника не лежат, по крайней мере, $(n-3)$ его стороны. Так как каждая из $(n-3)$ его сторон имеет общую часть хотя бы с одним из остальных многоугольников и две разные стороны с разными многоугольниками, то остальных многоугольников, по крайней мере, $(n-3)$, т. е. всего треугольник разрезан не менее, чем на $(n-2)$ многоугольника, у каждого из которых не более n сторон.

Если среди них есть треугольник, то задача решена. Если же треугольника нет, то количество сторон многоугольников от 4 до n, т. е. имеется $(n-3)$ варианта, поэтому число многоугольников с различным числом сторон не более $(n-3)$. Но в разрезании, по крайней мере, $(n-2)$ многоугольника; поэтому по принципу Дирихле среди них обязательно найдется два с равным числом сторон.

Задача 9. В каждую вершину правильного стоугольника помещено одно из чисел $\{1, 2, 3, \ldots, 49\}$. Докажите, что существуют четыре вершины A, B, C, D данного стоугольника, которые образуют параллелограмм $ABCD$, и такие, что $a + b = c + d$, где a, b, c, d — числа, стоящие соответственно в вершинах A, B, C и D.

Решение. Всего имеется пятьдесят диагоналей правильного стоугольника, которые являются диаметрами окружности, около него описанной. Если PQ — такая диагональ и в вершинах P и Q стоят соответственно числа p и q, то

$$0 \leq |p - q| \leq 48,$$

то есть $|p - q| = 0, 1, 2, \ldots, 48$. Поэтому по принципу Дирихле найдутся две диагонали PQ и RS такие, что $|p - q| = |r - s|$. Кроме того, ясно, что $PQRS$ — прямоугольник (рис. 7).

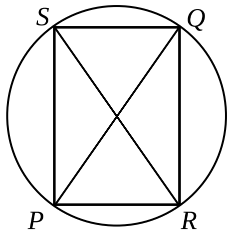

Рис. 7

Переобозначив теперь должным образом вершины прямоугольника $PQRS$ (без ограничения общности можно считать, например, что $p \le q$ и $r \le s$), получим нужное утверждение задачи.

Задача 10. В основании пирамиды выпуклый девятиугольник. Каждая диагональ основания и все боковые ребра окрашены в красный или синий цвет. Оба цвета использованы (заметим, что стороны основания не окрашиваются). Докажите, что существует хроматический (одноцветный) треугольник.

Решение. По принципу Дирихле из $9 = 4 \cdot 2 + 1$ ребер существуют не меньше пяти ребер, окрашенных в один цвет - красный; пусть эти пять ребер соединены с вершинами A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 основания (рис. 8).

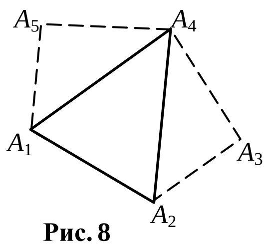

Рис. 8

Одна из сторон пятиугольника $A_1A_2A_3A_4A_5$ должна быть диагональю девятиугольника, лежащего в основании — пусть это будет A_1A_2. Тогда рассмотрим треугольник $A_1A_2A_4$; его стороны A_2A_4 и A_1A_4 также являются диагоналями девятиугольника.

Теперь имеется две возможности: все стороны треугольника $A_1A_2A_4$ синие, тогда он и будет искомым треугольником; если же, например, A_1A_2 красная сторона, то искомым будет треугольник SA_1A_2, где S — вершина пирамиды.

Задача 11. В квадрате со стороной 1 отметили 51 точку. Докажите, что три из них можно покрыть кругом диаметра $1/7$.

Решение. Разобьем квадрат прямыми, параллельными его сторонам, на 25 равных квадратов со стороной $1/5$. По принципу Дирихле найдется, по крайней мере, один из них, который содержит (внутри или на сторонах) не менее трех отмеченных точек. Опишем окружность около этого квадрата (рис. 9); тогда

$$AB^2 = DC^2 + AC^2 = \frac{1}{25} + \frac{1}{25} = \frac{1}{50}.$$

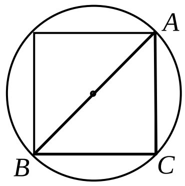

Рис. 9

Тем самым, для диаметра d этой окружности имеем неравенство

$$d = \sqrt{\frac{1}{50}} < \frac{1}{7}$$

и поэтому нужное утверждение задачи доказано.

Задача 12. Несколько дуг окружности покрашены в красный цвет. Сумма длин окрашенных дуг меньше половины длины окружности. Докажите, что существует диаметр, оба конца которого не окрашены.

Решение. Покрасим в синий цвет дуги, симметричные красным дугам. Так как сумма длин красных дуг равна сумме длин синих дуг, то сумма длин всех дуг (синих и красных) меньше длины окружности. Значит найдется неокрашенная точка; диаметр, проходящий через нее, и будет искомым.

Задача 13. В квадрате со стороной 1 расположено несколько окружностей с суммой их длин, равной 10. Докажите, что существует прямая, параллельная сторонам квадрата, которая пересекает не менее четырех окружностей.

Решение. В основе решения этой задачи лежит следующий геометрический вариант принципа Дирихле: *если на отрезке AB лежат несколько отрезков, сумма длин которых равна* $\alpha \cdot AB$ $(\alpha > 1)$, *тогда какая-то точка принадлежит, по крайней мере,* $[\alpha] + 1$ *отрезкам.* В частности, если, например, сумма длин отрезков равна $1{,}5 \cdot AB$, то какая-то точка исходного отрезка принадлежит, по крайней мере, двум отрезкам.

Спроектируем все окружности параллельно одной из сторон квадрата на другую сторону. Каждая окружность проектируется в отрезок, равный диаметру этой окружности. Сумма длин этих отрезков равна сумме длин диаметров этих окружностей и по условию задачи равна $10/\pi$. Так как $10/\pi > 3$, то по принципу Дирихле найдется точка, которая принадлежит не менее четырем из этих отрезков. Восстановив в этой точке перпендикуляр к стороне квадрата, мы получим искомую прямую.

Задача 14. (*Турнир городов.*) Докажите, что любой выпуклый многоугольник с четным числом сторон имеет диагональ, которая не параллельна ни одной из сторон многоугольника.

Решение. При решении этой довольно трудной задачи приходится использовать два метода: от противного и принцип Дирихле.

Итак, предположим, что каждая диагональ данного $2k$-угольника параллельна некоторой его стороне. Общее число диагоналей такого многоугольника равно (Почему?)

$$\frac{2k(2k-3)}{2} = 2k^2 - 3k = 2k(k-2) + k.$$

По принципу Дирихле существуют $(k-1)$ диагоналей $d_1, d_2, \ldots, d_{k-1}$, которые параллельны одной стороне a данного многоугольника. Эти k отрезков $d_1, d_2, \ldots, d_{k-1}, a$, которые соединяют различные пары вершин, из которых есть только одна сторона многоугольника, параллельны между собой. В виду выпуклости данного $2k$-угольника это невозможно. Полученное противоречие завершает решение задачи.

Задача 16. (*Ленинградская олимпиада.*). Доказать, что для всякого простого числа p, не равного 2 или 5, существует натуральное число k такое, что pk записывается в десятичной системе одними единицами.

Решение. Рассмотрим остатки, которые дают при делении на p числа 11, 111, 1111, 11111 и т. д. Чисел такого вида бесконечно много, а остатков лишь конечное число. Следовательно, по принципу Дирихле среди этих чисел найдутся, по крайней мере, два, которые при делении на p дадут одинаковые остатки. Тогда, вычитая из большего числа меньшее, мы получим число вида

$$\underbrace{11\ldots1}_{n`}\underbrace{00\ldots0}_{m} = \underbrace{11\ldots1}_{n} \cdot 10^m,$$

которое делится на p.

Задача 17. Докажите, что в выпуклом многограннике есть две грани с одинаковым числом сторон. (Сравните с задачей 8).

Решение. Рассмотрим грань с наибольшим числом сторон. Если таких граней несколько, то доказывать нечего. В противном случае, пусть такая грань имеет n сторон. Тогда в многограннике найдутся n различных граней, соединенных с рассматриваемой гранью, каждая из которых может иметь от 3 до n-1 сторон. По принципу Дирихле среди них найдутся две с одинаковым числом сторон.

Задача 18. В правильном двадцатиугольнике отметили 9 вершин. Докажите, что найдется равнобедренный треугольник с вершинами в отмеченных точках.

Решение. Разобьем вершины многоугольника на четыре группы так, что в каждую входят пять вершин, идущих через три при обходе многоугольника по его границе и образующих правильный пятиугольник. Так как групп четыре, а отмеченных вершин девять, то по принципу Дирихле найдется группа, в которую попадает не менее трех окрашенных вершин. Так как в правильном пятиугольнике любые три вершины образуют равнобедренный треугольник, то эти три вершины и будут искомыми.

Задача 19. а) Докажите, что для любых целых чисел a,b,c, которые не все равны нулю и которые по абсолютной величине не превосходят $1000\,000 = 10^6$, имеет место неравенство

$$|a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3}| > 10^{-21}.$$

б) Докажите, что существуют целые числа a,b,c, не все равные нулю и не превосходящие по модулю $1000\,000 = 10^6$ такие, что

$$|a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3}| < 10^{-11}.$$

Решение. а) Если $x_1 = a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3}$, $x_2 = a + b\sqrt{2} - \sqrt{3}$, $x_3 = a - b\sqrt{2} + c\sqrt{3}$, $x_4 = a - b\sqrt{2} - c\sqrt{3}$, то $x_1x_2x_3x_4$ является, как легко проверить, целым числом. Отсюда следует, что это число по абсолютной величине больше 1 и поэтому $|x_1| \geq 1/|x_2x_3x_4|$. С другой стороны, $|x_k| \leq 10^7$; поэтому $|x_1| \geq 10^{-21}$.

б) Рассмотрим все множество чисел вида $x + y\sqrt{2} + z\sqrt{3}$, где $x,y,z = 0,1,2,\ldots,10^6$. Это множество состоит из $(10^6 + 1)^3 > 10^{18}$ чисел (Почему?) и оно расположено на отрезке [0,d], где $d = 10^6(1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}) < 10^7$.

Разделим этот отрезок на 10^{18} равных частей. Тогда на одном из этих маленьком отрезке имеются два различных числа $x_1 + y_1\sqrt{2} + z_1\sqrt{3}$ и $x_2 + y_2\sqrt{2} + z_2\sqrt{3}$ из нашего множества таких, что

$$|(x_1 + y_1\sqrt{2} + z_1\sqrt{3}) - (x_2 + y_2\sqrt{2} + z_2\sqrt{3})| < d/10^{18} < 10^{-11}.$$

Если теперь $a = x_1 - x_2$, $b = y_1 - y_2$, $c = z_1 - z_2$, то число $a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3}$ удовлетворяет нужным условиям.

Задача 20. Узлы бесконечной клетчатой бумаги раскрашены в два цвета. Докажите, что существуют две вертикальные и две горизонтальные прямые, на пересечении которых лежат точки одного цвета.

Решение. Имеется всего 8 способов раскрасить три точки в два цвета. Поэтому рассмотрим тройки точек, которые лежат на пересечениях девяти различных горизонтальных и трех различных вертикальных прямых. По принципу Дирихле среди этих 9 троек точек, имеются две одинаково окрашенные тройки, лежащие на параллельных прямых. Три точки, раскрашенные в два цвета содержат две одинаково раскрашенные. Поэтому две вертикальные прямые, содержащие эти две точки, и выбранные две горизонтальные прямые будут искомыми.

Задача 21. (Лемма Туэ). Даны два взаимно простых целых числа m и x, $m > 1$. Тогда существуют такие натуральные числа a и b, $a,b \leq [\sqrt{m}]$, для которых по крайней мере одно из чисел $ax + b$ или $ax - b$ делится на m.

Решение. Рассмотрим множество чисел вида $p(\alpha,\beta) = \alpha x + \beta$, где целые числа α и β таковы, что $0 \leq \alpha, \beta \leq [\sqrt{m}]$. Это множество содержит $([\sqrt{m}] + 1)^2$ элементов и как следует из определения целой части числа $([\sqrt{m}] + 1)^2 > m$.

Тогда, существуют два *различных* числа, таких, что разность $p(\alpha_1, \beta_1) - p(\alpha_2, \beta_2)$ делится на m (см. задачи 2 и).

Если $\alpha_1 = \alpha_2$, то $\beta_1 - \beta_2$ делится на m, Так как $|\beta_1 - \beta_2| \leq \sqrt{m} < m$, то $\beta_1 = \beta_2$ и поэтому рассматриваемые числа совпадают, что невозможно.

Если $\beta_1 = \beta_2$, то число $(\alpha_1 - \alpha_2)x$ делится на m и поэтому $(\alpha_1 - \alpha_2)$ делится на m, так как $(m,x) = 1$. Тем самым, $\alpha_1 = \alpha_2$ и снова получаем равные числа, что невозможно.

Пусть $a = |\alpha_1 - \alpha_2|$ и $b = |\beta_1 - \beta_2|$. Тогда $0 < a, b \leq [\sqrt{m}]$ и одно из чисел $ax + b$, $ax - b$, тем самым, делится на m.

Проявление принципа Дирихле «наоборот» описано в книге [4]; в ней также хорошо и эмоционально рассказано о ситуациях в задачах, при решении которых «пахнет» принципом Дирихле или его вариациями. Ниже, мы приведем дословно небольшой фрагмент этой книги.

«**Задача.** Доказать, что в любом выпуклом шестиугольнике найдется диагональ, которая отсекает от него треугольник площадью, не большей, чем одна шестая площади шестиугольника.

Поиск решения. В воздухе явно носятся идеи типа принципа Дирихле наоборот: если чего-то мало, то в одном из мест недостаточно. У нас шесть диагоналей, отсекающих треугольники. Если бы все эти треугольники не пересекались — все было бы прекрасно: одна из частей была бы не больше одной шестой (сформулируйте утверждение, из которого это вытекает, по аналогии с принципом Дирихле). Но, увы, треугольники пересекаются. Хорошо бы как-то заменить каждый треугольник на что-то без самопересечений. А главное — такая замена не должна менять площади. Но как это сделать, не видно.

А что если подойти к задаче с обратной стороны: рассмотреть разные способы, как можно разбить шестиугольник на шесть частей, а уже потом придумывать, можно ли эти части как-то связать с нашими треугольниками? Видимо, разумно потребовать некоторой симметрии, иначе слишком много способов разбиения. Правда, симметрия не обязательно должна быть полной: например, три части могут быть одного типа, а три — другого, но эта пока неважно. Как же придумать хоть какой-то способ? Вот один: взять какую-то точку внутри шестиугольника и соединить ее с вершинами. Получим шесть треугольников (см. рис. 10).

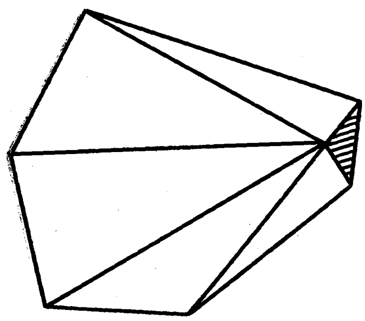

Рис. 10. Первая попытка найти треугольники

Площадь хотя бы одного из них не больше 1/6. Это хорошо. Но как связать этот треугольник с одним из требуемых? Недолгий анализ показывает, что никак, если мы возьмем просто любую точку: можно получить и одну миллионную, если точку брать слишком близко к одной из сторон, а это не для наших треугольников, значит, если идти таким путем, то точку нужно брать удачную, желательно где-то в центре. Но какую же особенную точку можно разыскать в шестиугольнике, причем в произвольном? Если бы в нем хотя бы главные диагонали, соединяющие противоположные вершины, пересекались в одной точке, то эту точку и можно было взять. А что, так и сделаем: будем решать пока более частную задачу, когда главные диагонали пересекаются в одной точке. Если решим ее, то, возможно, хоть какую-то идею найдем, а если не решим, то и общую не решим.

Итак, пусть диагонали пересекаются в одной точке. Образуются шесть треугольников, и площадь одного из них не больше 1/6, предположим, что того, который выделен на рис. 11. Как-то надо суметь связать его с нашими треугольниками. Понятно, что имеет смысл сравнивать его только с ближайшими соседями: треугольниками ABC и DBC.

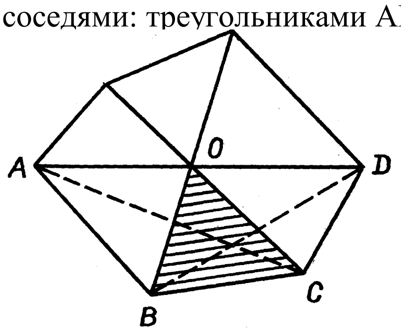

Рис. 11. Главные диагонали пересеклись в одной точке

Можно ли надеяться, что площадь одного из них не больше площади треугольника BOC? Очень даже похоже. Значит, попробуем это доказать. Как вообще можно сравнивать между собой площади разных треугольников? Площадь — это полупроизведение основания на высоту. Да, но основание у всех трех треугольников общее, значит, все решают высоты: где высота меньше, там и площадь меньше! Прекрасно, но это же совершенно понятно: так как точка O лежит между A и D, то либо из точки A, либо из D высота будет не больше (интуитивно это и доказательства не требует, а на этапе чистки решения мы в этом наверняка удостоверимся). Значит, все доказано. Еще раз проверим: площадь одного из треугольников, проведенных из точки O, не больше 1/6, например у треугольника BOC. А площадь BOC заключена между площадями ABC и DBC, так как это верно для высот. Значит, площадь одного из этих двух треугольников не больше 1/6.

Теперь мы можем попробовать решать общую задачу, когда диагонали не обязательно пересекаются в одной точке. Рисуем картинку (см. рис. 12).

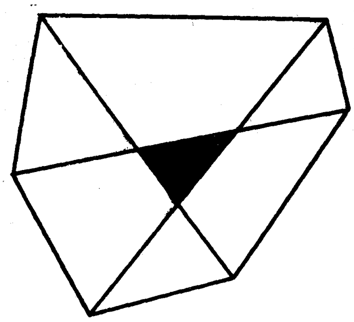

Рис. 12. Пересечения в одной точке не получилось

Внутри образовался треугольничек. Как это замостить? А может, и не надо? В самом деле, нам и не нужно, чтобы шесть вспомогательных треугольников, которые мы построим, покрывали весь шестиугольник: если не покроют, будет еще лучше. А зачем нам вообще треугольники? Понятно зачем: они нам помогут прийти к нашим. Но сейчас у нас только три треугольника. Да и те, вроде, не такие, какие нужно, а меньше. А какие нужны? Нужны такие, чтобы мы смогли еще раз провести рассуждение с высотами, как в предыдущем доказательстве, то есть чтобы основанием служила сторона шестиугольника, а вершина лежала на главной диагонали. Имеются ли такие треугольники и такое разбиение? Да, имеются. После сравнительно небольшого раздумья читатель и сам бы его нашел, но, на всякий случай, мы приведем его на последнем рисунке к нашей задаче (рис. 13). Дальнейшее уже понятно и предоставляется читателю».

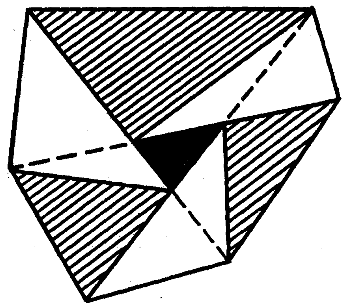

Рис. 13. Нужные треугольники найдены

Упражнения и задачи

1. Верно ли, что из ста произвольных целых чисел всегда можно выбрать: а) 15; б) 16 таких, у которых разность любых двух делится на 7?

Ответ; а) да; б) нет. Указание: Рассмотрите остатки от деления целого числа на 7.

2. Сформулируйте и докажите утверждение задачи 4 из основного текста для n чисел.

3. Имеется 17 точек на плоскости, никакие три из которых не лежат на одной прямой и которые попарно соединены отрезками между собой. Все отрезки покрашены в один из цветов: красный, синий или белый. Докажите, что существует, по крайней мере, один хроматический (одноцветный) треугольник. (В этой задаче число 17 — наименьшее. Почему?)

Указание: См. решение задачи 5.

4. Выберем любым способом 5 человек. Докажите, что, по крайней мере, двое из них имеют одинаковое число знакомых среди выбранных.

Докажите то же самое, если выбрано не 5, а 100 человек, n человек.

Указание: См. решение задачи 5(выше).

5. а) В квадрате со стороной 1 расположены несколько окружностей, сумма радиусов которых равна 0,6 (окружности могут пересекаться или совпадать). Докажите, что найдется прямая, параллельная одной из сторон квадрата, имеющая общие точки, по крайней мере, с двумя окружностями.

б) В круге радиуса 1 расположены несколько окружностей, сумма радиусов которых равна 0,6 (окружности могут пересекаться или совпадать). Докажите, что найдется окружность, концентрическая с границей данного круга, которая не имеет общих точек с окружностями внутри круга.

Указание. а) См. решение задачи 13.

б) Спроектируйте все окружности на один из радиусов данного круга.

6. (*Ленинградская олимпиада.*) В квадрат со стороной 1 см. поместили 1979 многоугольников, сумма площадей которых равна1978,5 см^2. Докажите, что все многоугольники имеют общую точку.

Указание. Если бы каждая точка квадрата была покрыта не более чем 1978 многоугольников, то сумма площадей всех многоугольников не превышала бы 1978 см.^{2}. Следовательно, существует точка, принадлежащая каждому многоугольнику.

7. (*Международная олимпиада.*) Международное общество состоит из представителей шести различных стран. Список членов общества состоит из 1978 фамилий, занумерованными числами 1, 2, … , 1978. Докажите, что существует хотя бы один член общества, номер которого равен сумме номеров двух членов из его страны или удвоенному номеру некоторого члена из его страны.

Указание. Предположим противное, то есть что заключение в за даче не выполняется. По принципу Дирихле одна из стран представлена не менее 330 членами, так как $329\cdot 6 + 3 = 1978$. Расположим номера ученых в этой стране в порядке возрастания: $a_1, a_2, \ldots, a_{330}, \ldots$. По нашему предположению, ученые с номерами $a_2 - a_1$, $a_3 - a_1$, $a_{330} - a_1$ представляют ученых других пяти стран. Среди них не менее 66 представляют одну страну: пусть их номера в порядке возрастания $b_1, b_2, \ldots, b_{66}$. Тогда ученые с номерами $b_2 - b_1, b_3 - b_1, \ldots, b_{66} - b_1$ представляют ученых из оставшихся четырех стран. Среди них не менее 17 ученых представляют одну страну: пусть их номера в порядке возрастания $c_1, c_2, \ldots, c_{17}$. Тогда ученые с номерами $c_2 - c_1, c_3 - c_1, \ldots, c_{17} - c_1$ представляют оставшиеся три страны. Из них аналогично найдем 5 ученых, представляющих две страны, а затем двух представителей одной страны, разность номеров которых не может быть номером ученого ни одной из стран Из полученного противоречия следует нужное в задаче утверждение.

8. (*Ленинградская олимпиада.*) Сумма 100 натуральных чисел, меньших 100, равна 200. Докажите, что из этих чисел можно выбрать несколько, сумма которых равна 100.

Указание. Обозначим эти числа a_1 , $a_2, \ldots, a_{100}$. Рассмотрите последовательность $b_k = a_1 + a_2 +\ldots+a_k$, $k= 1,2,3,\ldots,n$, и докажите, что в этой последовательности найдутся два числа, которые при делении на 100 дают одинаковые остатки.

9. (*Международная олимпиада*). В пространстве даны 9 точек, никакие четыре из которых не лежат в одной плоскости. Все эти точки попарно соединены отрезками. Отрезок может быть закрашен в синий или красный цвет или остаться незакрашенным. Найти наименьшее значение n, такое, что при любом закрашивании любых n отрезков найдется треугольник, все стороны которого будут закрашены в один цвет.

Ответ: $n = 33$. Указание. 9 точек соединяются 36 отрезками. Если закрашено 33 отрезка, то три не закрашены. Выберем такие три точки из девяти, которые служат концами незакрашенных отрезков; тогда остальные 6 точек соединены между собой закрашенными отрезками. Среди этих последних и найдется одноцветный треугольник. С другой стороны, существует пример раскрашивания 32 отрезков.

10. (*Дирихле.*) а) Докажите, что для любого действительного числа α и натурального числа n существуют целые числа p и q, такие, что

$$1\leq q \leq n \text{ и } \left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{qn}.$$

Используя это, докажите, что найдется бесконечно много дробей p/q, для которых выполняется неравенство

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^2}.$$

б) Докажите, что для любого набора действительных чисел $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ и любого натурального числа n существуют рациональные числа $p_1/q, p_2/q, \ldots, p_k/q$ такие, что

$$1 \le q \le n^k \quad \text{и} \quad \left|\alpha_s - \frac{p_s}{q}\right| < \frac{1}{qn}.$$

Используя это, докажите, что найдется бесконечно много дробей p_s/q, для которых имеет место система неравенств

$$\left|\alpha_s - \frac{p_s}{q}\right| < \frac{1}{q^2}, \; s = 1,2,\ldots,k.$$

11. (Теорема Кронекера). Пусть α — действительное число. Тогда для любого положительного числа ε найдутся два целых числа m и n такие, что

$$|m\alpha - n| < \varepsilon.$$

Указание. Если α — рациональное число, то доказывать нечего. Пусть α — иррациональное число. Возьмем натуральное число N такое, что $N > \frac{1}{\varepsilon}$,и разделим промежуток $[0, 1)$ на N равных полуинтервалов длины меньше ε:

$$\left[0, \frac{1}{N}\right), \quad \left[\frac{1}{N}, \frac{2}{N}\right), \quad \left[\frac{2}{N}, \frac{3}{N}\right), \quad \ldots, \quad \left[\frac{N-1}{N}, 1\right).$$

Отметим теперь в промежутке $[0, 1]$ точки $\{k\alpha\}$, где $\{x\} = x - [x]$ обозначает дробную часть числа x, и $k = 1, 2, \ldots, N+1$.

Каждое из чисел $\{k\alpha\}$ попадает в один из полуинтервалов. Так как их число равно N, а точек $N+1$, то какие-то две точки попадут в один и тот же интервал. Пусть это будут точки $\{p\alpha\}$ и $\{q\alpha\}$, где $p > q$ — натуральные числа. Тогда $(p-q)\alpha$ отличается от некоторого целого числа n менее чем на $\frac{1}{N}$ и, следовательно, менее, чем на ε. Положим $m = p - q$ имеем:

$$|m\alpha - n| < \varepsilon,$$

что и требовалось доказать.

12. (Теорема Кронекера). Пусть $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ — действительные числа. Тогда для любого положительного числа ε найдутся натуральное число m и целые числа $n_1, n_2, \ldots, n_k$ такие, что

$$|m\alpha_i - n_i| < \varepsilon, \quad i = 1, 2, \ldots, k.$$

Другими словами, найдется такое натуральное число m, что каждое из чисел $m\alpha_i$ отличается от целого менее, чем на ε (рис. 14а), то есть

$$\{m\alpha_i\} \in [0, \varepsilon) \cup (1-\varepsilon, 1]$$

или, другими словами, для набора чисел $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ любой длины при некотором натуральном m числа $m\alpha_i$ одновременно отличаются от целых меньше, чем на ε (рис.14б).

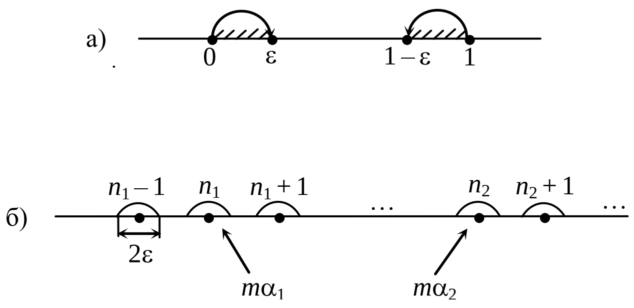

Рис. 14

Указание. Рассмотрим k последовательностей ($\{x\}$ — дробная часть числа x):

$$\begin{array}{l}\{\alpha_1\}, \; \{2\alpha_1\}, \; \{3\alpha_1\}, \; \ldots, \; \{p\alpha_1\}, \; \ldots, \\ \{\alpha_2\}, \; \{2\alpha_2\}, \; \{3\alpha_2\}, \; \ldots, \; \{p\alpha_2\}, \; \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \{\alpha_k\}, \; \{2\alpha_k\}, \; \{3\alpha_k\}, \; \ldots, \; \{p\alpha_k\}, \; \ldots.\end{array}$$

Все члены этих последовательностей принадлежат промежутку $[0; 1)$. Разобьем этот промежуток на полуинтервалы (кусочки) длины меньше ε:

$$\left[0, \frac{1}{M}\right), \quad \left[\frac{1}{M}, \frac{2}{M}\right), \quad \left[\frac{2}{M}, \frac{3}{M}\right), \quad \ldots, \quad \left[\frac{M-1}{M}, 1\right),$$

где M — натуральное, $M > 1/\varepsilon$ (тогда $1/M < \varepsilon$). Теперь каждому из членов этих последовательностей поставим в соответствие тот кусочек промежутка [0; 1), в котором он находится.

Тогда для каждого натурального р будет определен упорядоченный набор интервалов, соответствующих точкам $\{p\alpha_1\}$, $\{p\alpha_2\}$, … , $\{p\alpha_k\}$. Но так как рассматриваемых интервалов всего M, а в каждый набор входит k полуинтервалов, то число различных таких наборов равно M^k. Если k пробегает значения от 1 до $M^k + 1$, то для некоторых $p_1 < p_2 \le M^k + 1$ наборы совпадут. В этом случае число $m = p_1 - p_2$ удовлетворяет условию, т. к.

$$\{m\alpha_i\} = \{(p_2 - p_1)\alpha_i\} = \{p_2\alpha_i - p_1\alpha_i\},$$

а $\{p_1\alpha_i\}$ и $\{p_2\alpha_i\}$ находятся в одном полуинтервале, длиной меньше чем ε; потому $m\alpha_i$ находится на расстояниях, меньших ε, от целого числа..

13. Докажите, что существует натуральная степень числа 2, которая в десятичной записи начинается с 2006.

Указание. Для числа lg2 , по теореме Кронекера, существуют целое число m и натуральное число n такие, что

$$\lg 2006 < m \lg 2 - n < \lg 2007.$$

14. Узлы бесконечной клетчатой бумаги раскрашены в три цвета. Докажите, что существует равнобедренный прямоугольный треугольник с вершинами одного цвета.

Указание. Будем рассматривать равнобедренные прямоугольные треугольники, у которых вершины острых углов являются узлами, расположенных на прямой y = x, а вершина прямого угла расположена ниже прямой y = x. Рассмотрим множество квадратов с вершинами в узлах бумаги и размерами 3×3, у которых главные диагонали лежат на прямой y = x и такие, что они не пересекаются и расположены один за другим («цепочка квадратов» с общей «диагональю»). Каждый такой квадрат на своих сторонах и внутри себя содержит ровно 16 узлов решетки. Эти 16 узлов одного квадрата могут быть конечным числом способами раскрашены так, чтобы получались различные раскраски (Сколько таких квадратов существует точно?).

Поэтому существуют четыре таких квадрата, у которых все узлы закрашены одинаково. Если считать, что эти четыре квадрата являются соседними, то легко обнаружить нужный треугольник среди рассматриваемых, так как на диагонали каждого квадрата имеются два узла одинаково окрашенные. От квадратов общего положения легко перейти к четырем последовательным квадратам «цепочки».

15. С центром в каждом узле клетчатой бумаги нарисованы очень маленькие кружки одинаковых радиусов («зайцы»). Охотник находится в каком-то из узлов (где «зайца» нет) и стреляет один раз наугад. Докажите, что он вернется с охоты с добычей.

Указание. Луч y = αx с тангенсом углом наклона α, по теореме Кронекера, всегда пройдет вблизи некоторой точки с целыми координатами.

16. (Теорема Блихфельда). Дана бесконечная клетчатая бумага и фигура, площадь которой меньше площади клетки. Докажите, что эту фигуру можно положить на бумагу, не накрыв ни одной вершины клетки.

Указание. Расположим сначала фигуру на клетчатой бумаге произвольным способом. Те клетки бумаги, в которые попала фигура будем сдвигать параллельно прямым клетчатой бумаги и все такие клетки (с частями фигуры) уложим «в стопку» на одну маленькую клетку. Не все точки этого маленького квадрата будут покрыты частями фигуры, так как по условию ее площадь меньше единицы. Передвинув теперь саму клетчатую бумагу так, чтобы ее узел попал в эту непокрытую точку и восстановив в обратном порядке фигуру, мы и получим нужное расположение фигуры на клетчатой бумаге.

Здесь использован принцип, аналогичный принципу Дирихле: если внутри фигуры площади 1 расположено несколько фигур, сумма площадей которых больше 1, то по крайней мере две из них имеют общую точку.

17. а) В плоскости заданы 5 точек с целыми координатами. Докажите, что имеются три из них, которые являются вершинами треугольника с целой площадью.

б*) В пространстве заданы 19 точек с целыми координатами. Докажите, что среди них найдется четыре, которые являются вершинами тетраэдра с целым объемом.

Указание. а) Если $\vec{a}=(a_1,a_2),\vec{b}=(b_1,b_2)$, то параллелограмм с такими соседними сторонами имеет площадь

$$\Delta(\vec{a},\vec{b})=|a_1b_2-a_2b_1|.$$

Поэтому, если вершины треугольника находятся в точках $A(a_1,a_2)$, $B(b_1,b_2)$, $C(c_1,c_2)$, то площадь треугольника ABC может быть вычислена по формуле

$$[ABC]=\frac{1}{2}\Delta(\vec{b}-\vec{a},\vec{c}-\vec{a}),$$

где $\vec{a}=\overrightarrow{OA},\vec{b}=\overrightarrow{OB},\vec{c}=\overrightarrow{OC}$.

Среди заданных пяти точек по принципу Дирихле имеются, по крайне мере, две точки, у которых четности обеих координат совпадают. Тогда треугольник, образованный этими двумя точками и любой из оставшихся точек будет иметь целую площадь.

б) Указание. Если параллелепипед построен на трех векторах

$$\vec{a}=(a_1,a_2,a_3),\vec{b}=(b_1,b_2,b_3),\vec{c}=(c_1,c_2,c_3),$$

то его объем равен

$$\Delta(\vec{a},\vec{b},\vec{c})=|a_1b_2c_3+a_2b_3c_1+a_3b_1c_2-a_1b_3c_2-a_3b_2c_1-a_2b_1c_3|.$$

Тем самым, объем тетраэдра с вершинами в точках с координатами $M(m_1, m_2, m_3)$, $N(n_1,n_2,n_3)$, $P(p_1,p_2,p_3)$, $Q(q_1,q_2,q_3)$ вычисляется по формуле

$$V=\frac{1}{6}\Delta(\vec{m}-\vec{q},\vec{n}-\vec{q},\vec{p}-\vec{q}),$$

где $\vec{m}=\overrightarrow{OM},\vec{n}=\overrightarrow{ON},\vec{p}=\overrightarrow{OP},\vec{q}=\overrightarrow{OQ}$.

Теперь (как и при решении в п.а)) на основании принципа Дирихле можно заметить, что имеется по крайней мере 3 точки, координаты которых при делении на 6 дают одинаковые остатки. Выбрав их и любую другую точку мы и получим нужный тетраэдр с целочисленным объемом.

18. Пусть k – натуральное число и A – множество, состоящее из k + 1 целых чисел. Докажите, что в множестве A имеется два числа, разность которых делится на k.

Указание. См. решение задачи 2.

19. (Всероссийская олимпиада) Докажите, что среди любых 39 последовательных натуральных чисел обязательно найдется такое, у которого сумма цифр делится на 11.

Указание. Среди первых двадцати из данных чисел найдутся два, которые оканчиваются нулями. А у одного из этих двух на предпоследнем месте стоит цифра, отличная от 9. Если это число n и s – сумма его цифр, то числа n, n + 1, n + 2,…, n + 19 (содержащиеся в множестве) будут иметь суммы цифр равные s, s + 1, s + 2, …, s + 10. Среди 11 последовательных чисел, хотя бы одно делится на 11.

20. (Всероссийская олимпиада). Дан правильный 45-угольник. Можно ли расставить в его вершинах цифры 0, 1, 2, …, 9 так, чтобы для любой пары различных цифр нашлась сторона, концы которой занумерованы этими цифрами?

Указание. Покажем, что этого сделать нельзя. Одна цифра x может участвовать в образовании 9 пар. Чтобы для всех *этих* пар нашлась сторона 45-угольника, занумерованная соответствующими цифрами, необходимо поставить цифру x по крайней мере в пяти вершинах. Цифр всего 10, поэтому для их размещения необходимо 50 мест.

21. (Всесоюзная олимпиада). Каждая из девяти прямых разбивает квадрат на два четырехугольника, площади которых относятся как 2:3. Докажите, что по крайней мере три из девяти прямых проходят через одну точку.

Указание. Каждая прямая разбивает квадрат на две трапеции (прямоугольника). Поэтому такая прямая делит одну из средних линий квадрата в отношении 2:3. Всего имеется 4 точки, которые делят средние линии квадрата в заданном отношении, а прямых (через них проходящих) 9.

22. (*Международная олимпиада.*) В системе из p уравнений с $q=2p$ неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x_1+\ldots+a_{1q}x_q=0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\\ a_{p1}x_1+\ldots+a_{pq}x_q=0.\end{cases}$$

коэффициенты $a_{ij} \in \{-1, 0, -1\}$. Докажите, что существует решение $(x_1, x_2, \dots, x_q,)$ такое, что:

а) все x_j – целые;

б) $|x_j| \neq 0$ для некоторого j $(1 \le j \le q)$; и $|x_j| \le q$ для всех j $(1 \le j \le q)$.

Указание. Сначала найдем количество наборов целых чисел $(y_1, y_2, \dots, y_q)$ таких, что $0 \le y_i \le q$ для всех $i \in \{1, 2, \dots, q\}$. Поскольку каждое число может принимать $(q+1)$ значение, а количество чисел равно q, то существует $(q+1)^q$ таких наборов.

Теперь рассмотрим наборы чисел $(b_1, b_2, \dots, b_p)$, где

$$b_j = a_{j1}y_1 + a_{j2}y_2 + \dots + a_{jq}y_q,$$

и найдем их количество при фиксированных y_i, $0 \le y_i \le q$. Пусть r_j — количество коэффициентов, равных 1, среди чисел a_{ij} в j-ом уравнении. Тогда количество коэффициентов, равных –1, среди них не боле, чем $q - r_j$, следовательно,

$$(r_j - q)q \le b_j \le r_j\, q$$

и поэтому каждое b_j может принимать не более $q^2 + 1$ различных значений, т. е. количество таких наборов $(b_1, b_2, \dots, b_p)$ не больше, чем $(q^2 + 1)^p$.

Так как

$$(q+1)^q = (2p+1)^{2p} = (4p^2 + 4p + 1)^p > (4p^2 + 1)^p = (q^2 + 1)^p,$$

то по принципу Дирихле каким-то двум наборам $(y_1, y_2, \dots, y_q)$ и $(y'_1, y'_2, \dots, y'_q)$ соответствует один и тот же набор чисел $(b_1, b_2, \dots, b_p)$, то есть имеют место равенства

$$\begin{cases} a_{i1}y_1 + a_{i2}y_2 \dots + a_{iq}y_q = a_{i1}y'_1 + a_{i2}y'_2 \dots + a_{iq}y'_q, \\ i = 1, 2, \dots, p. \end{cases}$$

Рассмотрим теперь набор чисел $(x_1, x_2, \dots, x_q)$, где $x_j = y_i + y'_i$. Этот набор, очевидно, удовлетворяет заданной в условии задачи однородной системе; не все числа x_j равны нулю, поскольку выбранные наборы $(y_1, y_2, \dots, y_q)$ и $(y'_1, y'_2, \dots, y'_q)$ различны и, кроме того, все x_j удовлетворяют неравенству $|x_j| \le q$.

Литература:

1. Н.Б. Васильев, А.А. Егоров, Задачи Всесоюзных математических олимпиад. – М.: Наука, 1988.

2. В.В. Прасолов, Задачи по планиметрии. Часть 2. – М.: Наука, 1995.

3. С.Е. Рукшин, Математические соревнования в Ленинграде – Санкт- Петербурге, Первые пятьдесят лет. – Ростов на Дону: Издательский центр «МарТ», 2000.

4. В.А. Уфнаровский, Математический аквариум. – Ижевск: Научно-издательский центр «Регулярная и хаотическая динамика», Ижевская республиканская типография, 2000.