Р.Фейнман, Р.Лейтон, М.Сэндс

ФЕЙНМАНОВСКИЕ ЛЕКЦИИ ПО ФИЗИКЕ
1. СОВРЕМЕННАЯ НАУКА О ПРИРОДЕ. ЗАКОНЫ МЕХАНИКИ

Оглавление

К читателям русского издания

Это лекции по общей физике, которые читал физик-теоретик. Они совсем не похожи ни на один известный курс. Это может показаться странным: основные принципы классической физики, да и не только классической, но и квантовой, давно установлены, курс общей физики читается во всем мире в тысячах учебных заведений уже много лет и ему пора превратиться в стандартную последовательность известных фактов и теорий, подобно, например, элементарной геометрии в школе. Однако даже математики считают, что их науке надо учить по-другому. А уж о физике и говорить нечего: она столь интенсивно развивается, что даже лучшие педагоги все время сталкиваются с большими трудностями, когда им надо рассказывать студентам о современной науке. Они жалуются, что им приходится ломать то, что принято называть старыми или привычными представлениями. Но откуда берутся привычные представления? Обычно они попадают в молодые головы в школе от таких же педагогов, которые потом будут говорить о недоступности идей современной науки. Поэтому прежде чем подойти к сути дела, приходится тратить много времени на то, чтобы убедить слушателей в ложности того, что было ранее внушено им как очевидная и непреложная истина. Было бы дико сначала рассказывать школьникам «для простоты», что Земля плоская, а потом, как открытие, сообщать о ее шарообразности. А так ли далек от этого абсурдного примера тот путь, по которому будущие специалисты входят в современный мир идей теории относительности и квантов? Осложняет дело также то обстоятельство, что большей частью лектор и слушатели — люди разных поколений, и лектору очень трудно уйти от соблазна вести слушателей той знакомой и надежной дорогой, по которой он сам в свое время дошел до желанных высот. Однако старая дорога не вечно остается лучшей. Физика развивается очень быстро, и, чтобы не отставать от нее, надо менять пути ее изучения. Все согласны с тем, что физика — одна из самых интересных наук. В то же время многие учебники физики никак не назовешь интересными. В таких учебниках изложено все, что следует по программе. Там обычно объясняется, какую пользу приносит физика и как важно ее изучать, но из них очень редко можно понять, почему заниматься физикой интересно. А ведь эта сторона вопроса тоже заслуживает внимания. Как же можно сделать скучный предмет и интересным и современным? Об этом прежде всего должны подумать те физики, которые сами работают с увлечением и умеют передать это увлечение другим. Пора экспериментов уже наступила. Цель их — найти наиболее эффективные способы обучения физике, которые позволили бы быстро передать новому поколению весь тот запас знаний, который накоплен наукой за всю ее историю. Поиски новых путей в преподавании также всегда были важной частью науки. Преподавание, следуя развитию науки, должно непрерывно менять свои формы, ломать традиции, искать новые методы. Здесь важную роль играет то обстоятельство, что в науке все время происходит удивительный процесс своеобразного упрощения, который позволяет просто и кратко изложить то, что когда-то потребовало много лет работы.

Чрезвычайно интересная попытка в этом направлении была предпринята в Калифорнийском Технологическом институте (США), который сокращенно называют КАЛТЕХ, где группа профессоров и преподавателей после многочисленных дискуссий разработала новую программу по общей физике, а один из участников этой группы, крупный американский физик Ричард Фейнман, прочел лекции.

Лекции Фейнмана отличаются тем, что они обращены к слушателю, живущему во второй половине XX века, который уже многое знает или слышал. Поэтому в лекциях не тратится время на объяснение «ученым языком» того, что и так известно. Зато в них увлекательно рассказывается, как человек изучает окружающую его природу, о достигнутых сегодня границах в познании мира, о том, какие проблемы наука решает сегодня и будет решать завтра.

Лекции читались в 1961—1962 и 1962—1963 учебных годах; они записывались на магнитофон, а потом (и это оказалось само по себе трудной задачей) «переводились» на «письменный английский» профессорами М. Сэндсом и Р. Лейтоном. В этом своеобразном «переводе» сохранены многие особенности живой речи лектора, ее живость, шутки, отступления. Однако это очень ценное качество лекций отнюдь не было главным и самодовлеющим. Не менее важным были созданные лектором оригинальные методы подачи материала, в которых отразилась яркая научная индивидуальность автора, его точка зрения на пути обучения студентов физике. Это, разумеется, не случайно. Известно, что и в своих научных работах Фейнман всегда находил новые методы, которые очень быстро становились общепринятыми. Работы Фейнмана по квантовой электродинамике, статистике принесли ему широкое признание, а его метод — так называемые «диаграммы Фейнмана» — используется сейчас практически во всех областях теоретической физики.

Что бы ни говорили об этих лекциях — восторгались стилем изложения или сокрушались по поводу ломки старых добрых традиций, — одно остается бесспорным: надо начинать педагогические опыты. Наверное, не все согласятся с манерой автора излагать те или иные вопросы, не все согласятся с оценкой целей и перспектив современной физики. Но это послужит стимулом к появлению новых книг, в которых получат отражение другие взгляды. Это и есть эксперимент.

Но вопрос состоит не только в том, что́ рассказывать. Не менее важен и другой вопрос — в каком порядке это надо делать. Расположение разделов внутри курса общей физики и последовательность изложения — вопрос всегда условный. Все части науки настолько связаны друг с другом, что часто трудно решить, что́ надо излагать сначала, а что́ потом.

Однако в большинстве вузовских программ и имеющихся учебников до сих пор сохраняются определенные традиции.

Отказ от привычной последовательности изложения — одна из отличительных особенностей фейнмановских лекций. В них рассказано не только о конкретных задачах, но и о месте, которое занимает физика в ряде других наук, о путях описания и изучения явлений природы. Вероятно, представители других наук — скажем, математики — не согласятся с тем местом, которое отводит этим наукам Фейнман. Для него, как физика, «своя» наука, конечно, выглядит самой главной. Но это обстоятельство не занимает много места в его изложении. Зато в его рассказе ярко отражаются те причины, которые побуждают физика вести тяжелую работу исследователя, а также те сомнения, которые у него возникают, когда он сталкивается с трудностями, кажущимися сейчас непреодолимыми.

Молодой естествоиспытатель должен не только понять, почему интересно заниматься наукой, но и почувствовать, какой дорогой ценой достаются победы и как порой бывают тяжелы дороги, к ним ведущие.

Надо также иметь в виду, что если сначала автор обходился без математического аппарата или использовал лишь тот, который изложен в лекциях, то от читателя, по мере продвижения его вперед, будет требоваться увеличение его математического багажа. Впрочем, опыт показывает, что математический анализ (по крайней мере его основы) выучивается сейчас легче, чем физика.

Лекции Фейнмана вышли в США в трех больших томах. Первый содержит в основном лекции по механике и теории теплоты, второй — электродинамику и физику сплошных сред, а третий — квантовую механику. Чтобы книга была доступна большему числу читателей и чтобы ею было удобнее пользоваться, русское издание будет выходить небольшими выпусками. Первые четыре из них соответствуют первому тому американского издания.

Кому будет полезна эта книга? Прежде всего — преподавателям, которые ее прочтут целиком: она заставит их задуматься об изменении сложившихся взглядов на то, как начинать обучать физике. Далее, ее прочтут студенты. Они найдут в ней много нового в дополнение к тому, что́ они узнают на лекциях. Конечно, ее попытаются читать и школьники. Большинству из них будет трудно одолеть все, но и то, что они смогут прочесть и понять, поможет им войти в современную науку, путь в которую всегда бывает трудным, но никогда не бывает скучным. Тому, кто не верит, что может пройти его, не стоит браться за изучение этой книги! И, наконец, ее могут читать все остальные. Читать просто так, для удовольствия. Это тоже очень полезно.

Фейнман в своем предисловии оценивает результаты своего опыта не очень высоко: слишком малая доля студентов, прослушавших его курс, усвоили все лекции. Но так и должно быть. Первый опыт редко приносит полный успех. Новые идеи всегда находят вначале лишь немного сторонников и лишь постепенно становятся привычными.

Я. Смородинский

Январь 1965

ПРЕДИСЛОВИЕ Р. ФЕЙНМАНА ▶

Это — лекции по физике, которые я читал в прошлом и позапрошлом годах в Калифорнийском Технологическом институте для студентов первого и второго курсов. Но это не дословная их запись. Их пригладили — местами очень сильно, а порой не очень. К тому же это лишь часть полного курса обучения. Дважды в неделю 180 слушателей собирались в большой аудитории и, прослушав лекцию, группами по 15—20 человек проводили еще семинары под руководством ассистентов. Вдобавок раз в неделю проводились и лабораторные работы.

Чего мы хотели добиться, читая эти лекции? Мы хотели утвердить интерес к физике у молодых ее энтузиастов, у вчерашних выпускников средней школы. Перед поступлением в институт они много наслышались о том, как интересна и как увлекательна современная физика — теория относительности, квантовая механика и т. д. Но если бы этот курс читался так, как он читался раньше, весь их энтузиазм за два года мало-помалу улетучился бы — чересчур уж редко при обычном обучении встречаются действительно величественные, новые, современные идеи. Студентов заставили бы изучать наклонную плоскость, электростатику и прочее в этом роде, и все их порывы были бы сведены на нет. И весь вопрос был в том, сможем ли мы так построить курс, чтобы у самых способных, самых горячих студентов сохранился и укрепился их энтузиазм.

Не сочтите эти лекции каким-то обзорным курсом. Нет, курс этот весьма серьезен. Читая его, я ориентировался на самых сообразительных, я хотел по возможности, чтобы даже самые сильные слушатели не были в состоянии до конца усвоить все, что́ есть в этих лекциях. Для этого я подкидывал им мысли о возможных применениях основных идей и понятий вне основной линии наступления. Для этой цели я старался поточнее формулировать все утверждения, указывать, где только можно, какие уравнения и идеи укладываются в физическую картину мира и как при дальнейшем углублении они могут измениться. Я понимал также, что таким студентам очень важно указать, что́ из изучаемого они (если, конечно, у них достанет соображения) могут сами вывести из уже известного, а что́, наоборот, для них совершенно ново. Формулируя новые идеи, я пытался либо вывести их, если они могли быть выведены, либо объяснить, что это действительно новая идея, что на уже изученные понятия ее опереть никак нельзя и что поэтому нельзя ее считать доказуемой, а можно лишь включить со стороны.

Приступая к лекциям, я предполагал, что студенты все же кое-что вынесли из средней школы — разные там геометрические оптики, простенькие понятия из химии и тому подобное. Я не видел также смысла в том, чтобы устанавливать какой-то определенный порядок в лекциях, чтоб нельзя было упоминать о вещах, о которых подробно будет говориться только позже. Наоборот, я часто вкратце говорю о том, что́ студент по-настоящему изучит намного позднее, когда он будет лучше подготовлен. Например, понятие об индуктансе или об энергетических уровнях дается на первых порах очень приблизительное и только спустя много времени развивается как следует.

Рассчитывая курс на самого активного слушателя, я все же учел интересы и такого парня, которого все эти фейерверки мыслей и многосторонние приложения могут только встревожить и отпугнуть, от кого вообще нельзя ожидать, что он усвоит бо́льшую часть материала. Я хотел, чтобы для него в лекциях оказалось по крайней мере основное ядро, или костяк, того, что он *может* получить. Я надеюсь, что он не очень будет нервничать, если не поймет в лекции всего. Пусть не понимает всего, пусть ухватит только самую суть, самое бьющее в глаза. Конечно, и для этого он должен проявить некоторую сообразительность, должен захотеть понять, какие теоремы и представления являются самыми главными, а что он сможет понять только позже и пока оставляет в стороне.

Была у меня одна серьезная трудность, когда я читал эти лекции: не работала обратная связь — от студента к преподавателю; я не видел, насколько хорошо эти лекции доходят. Это очень серьезная помеха, и я поныне не знаю, хороши ли эти лекции. Это по существу эксперимент, и, если бы мне пришлось его проделать еще раз, я бы его поставил иначе, но я надеюсь, что мне не придется браться за это дело вторично! И все же мне кажется, что для первого курса, по крайней мере в отношении физики, все выглядит вполне прилично.

А вот второй частью курса * я не очень доволен. В начале этой части, говоря об электричестве и магнетизме, я не смог придумать какого-либо особого, отличного от общепринятого способа изложения, не смог найти такого подхода к теме, который возбуждал бы к ней интерес. С электричеством и с магнетизмом, таким образом, не много мне удалось сделать. После этой темы в конце второго курса я сначала собирался прочесть несколько лекций о свойствах твердых тел, касаясь главным образом таких вещей, как нормальные колебания, решения уравнения диффузии, колебательные системы, ортогональные функции и т. д., т. е. изложить начала того, что обычно именуют «методами математической физики». Задним числом могу сознаться, что, если бы я решился читать этот курс вторично, я бы непременно вернулся к этому намерению. Но поскольку повторение этих лекций не планируется, а вместо этого мне сказали, что неплохо было бы дать введение в квантовую механику, то это вы и обнаружите в конце настоящего курса.

Совершенно ясно, что студентам, желающим хорошо разобраться в физике, можно было бы подождать с изучением квантовой механики и до третьего курса. Но, возражая, мне выдвинули довод, что многие студенты с моего курса изучают физику только в качестве основы для занятий другими науками. Обычный же способ изучения квантовой механики делает ее почти недоступной для большинства студентов, потому что у них нет возможности так долго изучать ее. А в то же время вся махина

---

* В русском издании содержание тома II войдет в выпуски 5—7. Том III будет содержать квантовую механику.— *Прим. ред.*

дифференциальных уравнений, весь такой подход к квантовой механике редко используется в ее применениях, в частности в таких более сложных применениях, как электроника и химия. Поэтому я попробовал описать принципы квантовой механики так, чтобы знания уравнений в частных производных вначале не требовалось. Даже физику, я думаю, будет интересно такое изложение квантовой механики (по причинам, которые станут ясны из самих лекций). И все же мне кажется, что эксперимент с квантовой механикой не очень удался главным образом из-за того, что мне не хватило времени и конец пришлось скомкать (мне бы нужно было еще 3—4 лекции, чтобы полней изложить такие вопросы, как энергетические полосы и пространственная зависимость амплитуд). Да и, кроме того, я никогда прежде не излагал материал таким способом и отсутствие обратной связи ощущал особенно остро. Теперь я думаю, что квантовую механику надо излагать все-таки позже. Не исключено, что у меня появится возможность еще раз прочесть этот курс. Тогда я сделаю это получше.

В этом курсе нет лекций, посвященных решению задач. Они решались на семинарах. Хотя на трех лекциях я решал задачи, но в курс они не вошли. После лекции о вращающихся системах была прочитана лекция об инерциальной навигации, но, к сожалению, при издании ее опустили. Пятую и шестую лекции прочитал Мэтью Сэндс (я уезжал тогда из города).

Возникает естественный вопрос, насколько этот эксперимент удался. Моя личная точка зрения, которую, впрочем, не разделяют работавшие со студентами преподаватели, довольно пессимистична. Мне не кажется, что я хорошо поступил со студентами. Когда я наблюдал, как большинство студентов решает задачки на экзаменах, я подумывал о крахе всей моей системы преподавания. Правда, мои друзья напомнили мне, что среди студентов оказался десяток-другой разобравшихся, как это ни странно, почти во всем, активно трудившихся над материалом и подолгу с увлечением мучившихся над трудными вопросами. Эти ребята, на мой взгляд, обладают сейчас первоклассной подготовкой по физике, и я попытаюсь после всего заполучить их к себе на работу. Впрочем, «обучение редко приносит плоды кому-либо, кроме тех, кто предрасположен к нему, но им оно почти не нужно» (Гиббонс).

Тем не менее я не хотел бы бросать ни одного студента на произвол судьбы, как это, видимо, бывало при чтении курса. Как все-таки помочь студентам? Может быть, надо больше поработать над составлением комплекса задач, которые могли бы пролить свет на идеи, развиваемые в лекциях? Задачи дадут хорошую возможность расширить лекционный материал и помогут сделать идеи лекций более осязаемыми и полными, лучше уложить их в голове.

Все же я думаю, что самое лучшее решение проблемы образования — это понять, что самым превосходным обучением является прямая, личная связь между учеником и хорошим учителем, когда ученик обсуждает идеи, размышляет о разных вещах и беседует о них. Невозможно многому научиться, просто отсиживая лекции или даже просто решая задачи. Но в наше время такое множество студентов должно быть обучено, что для идеалов приходится подыскивать эрзацы. Может быть, мои лекции помогут в этом. Может быть, в тех краях, где можно найти отдельного учителя для каждого ученика, эти лекции смогут вдохновить учителя и подбросить ему кое-какие идеи. Может быть, поразмыслив над ними, он только позабавится, а может, и разовьет их дальше.

Ричард Фейнман

Июнь 1963

ПРЕДИСЛОВИЕ

В основу этой книги легли лекции по общей физике, которые профессор Р. Фейнман читал в 1961—1962 академическом году в Калифорнийском Технологическом институте. Это — первая половина двухгодичного вводного курса, обязательного для всех студентов КАЛТЕХа. В 1962—1963 академическом году был прочитан второй цикл лекций, чем завершилась основная часть рассчитанной на четыре года работы по перестройке вводного курса физики.

Необходимость такого коренного пересмотра курса вызывалась не только быстрым развитием физики за последние десятилетия, но и тем, что в последние годы первокурсники приходили в КАЛТЕХ с более глубокой математической подготовкой, чем раньше,— результат улучшения преподавания математики в средней школе. Мы хотели, используя преимущества более прочного математического фундамента, изложить побольше современного материала, что сделало бы курс более интересным, наводящим на размышления и лучше отражающим физику наших дней.

Чтобы иметь представление о том, что́ надо включить в курс и как это сделать, преподавателям физического факультета было предложено высказать свои идеи в виде краткой программы курса. Возникло несколько проектов перестройки, которые были обсуждены подробно и с пристрастием. Почти все сошлись в одном: перестройку курса нельзя начинать ни просто с переделки уже существующих учебников, ни даже с создания нового учебника; новый курс должен строиться на основе лекций, лекции должны читаться два или три раза в неделю. Создание соответствующих печатных руководств — это будет уже следующий шаг; эти же лекции определят и содержание будущих лабораторных работ. Вчерне были обрисованы общие контуры курса, но это был лишь предварительный набросок, многое в нем выглядело спорным и могло измениться по усмотрению того, кто взялся бы за чтение лекций.

Обсуждались и многочисленные варианты осуществления проекта. Первоначально предполагалось, что будет создана группа из N основных участников (лекторов), которые поровну распределят работу: каждый возьмет себе $1/N$ часть материала, прочтет лекции и подготовит их к печати. Однако отсутствие необходимого числа участников и трудность выработки среди них единой точки зрения, связанная с индивидуальными вкусами, взглядами и даже характером каждого, сделали этот план неосуществимым.

Счастливая идея о том, как все же можно создать, быть может, не просто новый курс, отличный от других, а, возможно, уникальный, пришла профессору Сэндсу. Он предложил, чтобы профессор Р. Фейнман подготовил и прочел лекции, которые будут записаны на магнитофонную ленту. После обработки и издания этих лекций получился бы новый учебник. Вот суть принятого в конце концов плана.

Сначала ожидалось, что необходимая редакторская работа сведется к подбору рисунков, расстановке запятых и исправлению грамматических ошибок; этим могли бы заняться между делом один-два студента старших курсов. К несчастью, эти надежды жили недолго. Оказалось, что даже простое приведение записей лекций к пригодному для чтения виду, даже без переработки и пересмотра материала лекций, требует много времени. Такая работа не под силу техническому редактору или студенту, она требует пристального внимания физика-профессионала, причем над каждой лекцией он должен потрудиться часов десять—двадцать.

Трудность редакторской работы, а также необходимость как можно скорее передать лекции в руки студентов сильно затруднили окончательную «доводку» материала, и мы были вынуждены ограничиться созданием предварительного, но годного для издания варианта лекций, который можно было использовать немедленно, хотя и нельзя считать окончательным. Крайняя нужда в большом количестве экземпляров лекций для наших студентов, а также интерес к лекциям студентов и преподавателей других институтов заставили нас издать лекции в их предварительном виде, не дожидаясь окончательной редакции, которой, может быть, никогда и не будет. Мы нисколько не заблуждаемся относительно полноты, связности и логической стройности материала; более того, уже в ближайшем будущем мы собираемся вновь модернизировать курс и думаем, что ни форма, ни содержание его не останутся долго без изменений.

Кроме лекций — наиболее важной части курса,— нужно было позаботиться о задачах, развивающих опыт и умение студентов, и о лабораторных работах, чтобы студенты могли «потрогать руками» изложенный в лекциях материал. Ни то, ни другое еще не достигло той законченности, которую имел материал лекций, хотя кое-что в этом направлении, конечно, сделано. Некоторые задачи были придуманы в ходе чтения лекций, они затем были улучшены, а число их увеличено при повторном чтении курса. Однако мы еще не уверены в том, что эти задачи достаточно разнообразны и углубляют содержание лекций настолько, чтобы студенты могли сами полностью понять, каким мощным аппаратом они владеют. Поэтому задачи будут опубликованы отдельно и в таком виде, который бы допускал их более или менее частую переделку.

Профессор Неер предложил включить в курс несколько новых опытов. Среди них опыты, основанные на использовании воздушных подшипников с чрезвычайно малым трением: новый линейный воздушный желоб, с помощью которого можно количественно изучить одномерное движение, соударения тел и гармоническое движение; а также поддерживаемый на воздушной подушке и движимый воздухом максвелловский волчок, с помощью которого можно изучить вращение с ускорением, прецессию и нутацию гироскопа. Разработка новых лабораторных опытов будет, по-видимому, продолжаться в течение значительного времени.

Этот пересмотр учебной программы возглавляли профессора Р. Лейтон, Г. Неер и М. Сэндс. Официально в этой работе принимали участие профессора Р. Фейнман, Г. Нойгебауер, Р. Саттон, Г. Стаблер, Ф. Стронг и Р. Фогт с кафедр физики, математики и астрономии, а также профессора Т. Кофи, М. Плессет и К. Уилтс с кафедры технических наук. Мы сердечно благодарим за ценную помощь всех тех, кто принимал участие в пересмотре курса. Особенно мы обязаны фонду Форда, без финансовой помощи которого эта работа никогда не была бы осуществлена.

Роберт Б. Лейтон

Июль 1963

Глава 1

АТОМЫ В ДВИЖЕНИИ

§ 1. Введение

Этот двухгодичный курс физики рассчитан на то, что вы, читатель, собираетесь стать физиком. Положим, это не так уж обязательно, но какой преподаватель не надеется на это! Если вы и впрямь хотите быть физиком, вам придется много поработать. Как-никак, а двести лет бурного развития самой мощной области знания что-нибудь да значат! Такое обилие материала, пожалуй, и не усвоишь за четыре года; вслед за этим нужно еще прослушать специальные курсы.

И все же весь результат колоссальной работы, проделанной за эти столетия, удается сконденсировать — свести в небольшое число *законов*, которые подытоживают все наши знания. Однако и законы эти тоже нелегко усвоить, и просто нечестно по отношению к вам было бы начинать изучение такого трудного предмета, не имея под рукой какой-нибудь схемы, какого-нибудь очерка взаимосвязи одних частей науки с другими. Первые три главы и представляют собой такой очерк. Мы познакомимся в этих главах с тем, как связана физика с остальными науками, как относятся эти остальные науки друг к другу, да и что такое сама наука. Это поможет нам «ощутить» предмет физики.

Вы спросите: почему бы сразу, на первой же странице, не привести основные законы, а после только показывать, как они работают в разных условиях? Ведь именно так поступают в геометрии: сформулируют аксиомы, а потом остается только делать выводы. (Неплохая мысль: изложить за 4 минуты то, что и в 4 года не уложишь.) Сделать это невозможно по двум причинам. Во-первых, нам известны *не все* основные законы; наоборот, чем больше мы узнаем, тем сильнее расширяются границы того, что мы должны познать! Во-вторых, точная формулировка законов физики связана со многими необычными идеями и понятиями, требующими для своего описания столь же необычной математики. Нужна немалая практика только для того, чтобы наловчиться понимать смысл *слов*. Так что ваше предложение не пройдет. Придется нам двигаться постепенно, шаг за шагом.

Каждый шаг в изучении природы — это всегда только *приближение* к истине, вернее, к тому, что мы считаем истиной. Все, что мы узнаем,— это какое-то приближение, ибо *мы знаем, что не все еще законы мы знаем*. Все изучается лишь для того, чтобы снова стать непонятным или, в лучшем случае, потребовать исправления.

Принцип науки, почти что ее определение, состоит в следующем: *пробный камень всех наших знаний — это опыт*. Опыт, эксперимент — это *единственный судья* научной «истины». А в чем же источник знаний? Откуда приходят те законы, которые мы проверяем? Да из того же опыта; он помогает нам выводить законы, в нем таятся намеки на них. А сверх того нужно еще *воображение*, чтобы за намеками увидеть что-то большое и главное, чтобы отгадать нежданную, простую и прекрасную картину, встающую за ними, и потом поставить опыт, который убедил бы нас в правильности догадки. Этот процесс воображения настолько труден, что происходит разделение труда: бывают физики-*теоретики*, они воображают, соображают и отгадывают новые законы, но опытов не ставят, и бывают физики-*экспериментаторы*, чье занятие — ставить опыты, воображать, соображать и отгадывать.

Мы сказали, что законы природы — это приближения; сперва открывают «неправильные» законы, а потом уж — «правильные». Но как опыт может быть «неверным»? Ну, во-первых, по самой простой причине: когда в ваших приборах что-то неладно, а вы этого не замечаете. Но такую ошибку легко уловить, надо лишь все проверять и проверять. Ну, а если не придираться к мелочам, *могут ли* все-таки результаты опыта быть ошибочными? Могут, из-за нехватки точности. Например, масса предмета кажется неизменной; вращающийся волчок весит столько же, сколько лежащий на месте. Вот вам и готов «закон»: масса постоянна и от скорости не зависит. Но этот «закон», как выясняется, неверен. Оказалось, что масса с увеличением скорости растет, но только для заметного роста нужны скорости, близкие к световой. *Правильный* закон таков: если скорость предмета меньше 100 *км/сек*, масса с точностью до одной миллионной постоянна. Вот примерно в такой приближенной форме этот закон верен. Можно подумать, что практически нет существенной разницы между старым законом и новым. И да, и нет. Для обычных скоростей можно забыть об оговорках и в хорошем приближении считать законом утверждение, что масса постоянна. Но на больших скоростях мы начнем ошибаться, и тем больше, чем скорость выше.

Но самое замечательное, что *с общей точки зрения любой приближенный закон абсолютно ошибочен.* Наш взгляд на мир потребует пересмотра даже тогда, когда масса изменится хоть на капельку. Это — характерное свойство общей картины мира, которая стоит за законами. Даже незначительный эффект иногда требует глубокого изменения наших воззрений.

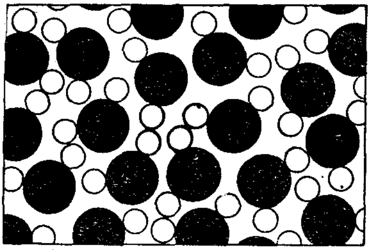
Так что же нам нужно изучить сначала? Учить ли нам *правильные*, но необычные законы с их странными и трудными понятиями, например теорию относительности, четырехмерное пространство-время и т. д.? Или же начать с простого закона «постоянной массы»? Он хоть и приближенный, но зато обходится без трудных представлений. Первое, бесспорно, приятней, притягательней; первое очень соблазняет, но со второго начать легче, и потом ведь это первый шаг к углубленному пониманию правильной идеи. Этот вопрос встает все время, когда преподаешь физику. На разных этапах курса мы по-разному будем решать его, но на каждой стадии мы будем стараться изложить, чтó именно сейчас известно и с какой точностью, как это согласуется с остальным и чтó может измениться, когда мы узнаем об этом больше.

Давайте перейдем к нашей схеме, к очерку нашего понимания современной науки (в первую очередь физики, но также и прочих близких к ней наук), так что, когда позже нам придется вникать в разные вопросы, мы сможем видеть, чтó лежит в их основе, чем они интересны и как укладываются в общую структуру.

Итак, *как же выглядит* картина мира?

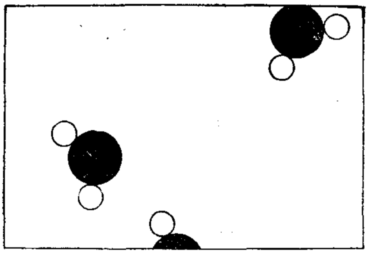
§ 2. Вещество состоит из атомов

Если бы в результате какой-то мировой катастрофы все накопленные научные знания оказались бы уничтоженными и к грядущим поколениям живых существ перешла бы только одна фраза, то какое утверждение, составленное из наименьшего количества слов, принесло бы наибольшую информацию? Я считаю, что это — *атомная гипотеза* (можете называть ее не гипотезой, а фактом, но это ничего не меняет): *все тела состоят из атомов — маленьких телец, которые находятся в беспрерывном движении, притягиваются на небольшом расстоянии, но отталкиваются, если одно из них плотнее прижать к другому.* В одной этой фразе, как вы убедитесь, содержится *невероятное* количество информации о мире, стоит лишь приложить к ней немного воображения и чуть соображения.



Фиг. 1.1. Капля воды (увеличенная в миллиард раз).

Чтобы показать силу идеи атома, представим себе капельку воды размером 0,5 *см*. Если мы будем пристально разглядывать ее, то ничего, кроме воды, спокойной, сплошной воды, мы не увидим. Даже под лучшим оптическим микроскопом при 2000-кратном увеличении, когда капля примет размеры большой комнаты, и то мы *все еще* увидим относительно спокойную воду, разве что по ней начнут шнырять какие-то «футбольные мячи». Это парамеция — очень интересная штука. На этом вы можете задержаться и заняться парамецией, ее ресничками, смотреть, как она сжимается и разжимается, и на дальнейшее увеличение махнуть рукой (если только вам не захочется рассмотреть ее изнутри). Парамециями занимается биология, а мы прошествуем мимо них и, чтобы еще лучше разглядеть воду, увеличим ее опять в 2000 раз. Теперь капля вырастет до 20 *км*, и мы увидим, как в ней что-то кишит; теперь она уже не такая спокойная и сплошная, теперь она напоминает толпу на стадионе в день футбольного состязания с высоты птичьего полета. Что же это кишит? Чтобы рассмотреть получше, увеличим еще в 250 раз. Нашему взору представится что-то похожее на фиг. 1.1. Это капля воды, увеличенная в миллиард раз, но, конечно, картина эта условная. Прежде всего частицы изображены здесь упрощенно, с резкими краями — это первая неточность. Для простоты они расположены на плоскости, на самом же деле они блуждают во всех трех измерениях — это во-вторых. На рисунке видны «кляксы» (или кружочки) двух сортов — черные (кислород) и белые (водород); видно, что к каждому кислороду пристроились два водорода. (Такая группа из атома кислорода и двух атомов водорода называется молекулой.) Наконец, третье упрощение заключается в том, что настоящие частицы в природе беспрерывно дрожат и подпрыгивают, крутясь и вертясь одна вокруг другой. Вы должны представить себе на картинке не покой, а движение. На рисунке нельзя также показать, как частицы «липнут друг к другу», притягиваются, пристают одна к одной и т. д. Можно сказать, что целые их группы чем-то «склеены». Однако ни одно из телец не способно протиснуться сквозь другое. Если вы попробуете насильно прижать одно к другому, они оттолкнутся.



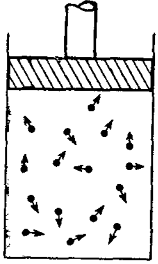
Фиг. 1.2. Пар под микроскопом.

Радиус атомов примерно равен 1 или 2 на 10^{-8} *см*. Величина 10^{-8} *см* это *ангстрем*, так что радиус атома равен 1 или 2 ангстремам (Å). А вот другой способ запомнить размер атома: если яблоко увеличить до размеров Земли, то атомы в яблоке сами станут размером с яблоко.

Представьте теперь себе эту каплю воды с ее частичками, которые приплясывают, играют в пятнашки и льнут одна к другой. Вода сохраняет свой объем и не распадается на части именно из-за взаимного притяжения молекул. Даже катясь по стеклу, капля не растекается, опять-таки из-за притяжения. И все вещества не улетучиваются по той же причине. Движение частиц в теле мы воспринимаем как *теплоту*; чем выше температура, тем сильнее движение. При нагреве воды толчея среди частиц усиливается, промежутки между ними растут, и наступает миг, когда притяжения между молекулами уже не хватает, чтобы удержать их вместе, вот тогда они и *улетучиваются*, удаляются друг от друга. Так получают водяной пар: при повышении температуры усиливается движение и частицы воспаряют.

На фиг. 1.2 показан пар. Рисунок этот плох в одном — при выбранном нами увеличении на комнату придется всего несколько молекул, поэтому сомнительно, чтобы целых $2^1/_2$ молекулы оказались на таком маленьком рисунке. На такой площадке скорее всего не окажется ни одной частицы. Но ведь надо что-то нарисовать, чтоб рисунок не был совсем пустым. Глядя на пар, легче увидеть характерные черты молекул воды. Для простоты на рисунке угол между атомами водорода взят 120°. На самом же деле он равен 105°3′, а промежуток между центрами атомов кислорода и водорода равен 0,957 Å. Как видите, мы довольно хорошо представляем себе эту молекулу.

Давайте рассмотрим некоторые свойства водяного пара или других газов. Разрозненные молекулы пара то и дело ударяются о стенки сосуда. Представьте себе комнату, в которой множество теннисных мячей (порядка сотни) беспорядочно и беспрерывно прыгают повсюду. Под градом ударов стенки расходятся (так что их надо придерживать). Эту неумолкаемую дробь ударов атомов наши грубые органы чувств (их-то чувствительность



Фиг. 1.3. Цилиндр с поршнем.

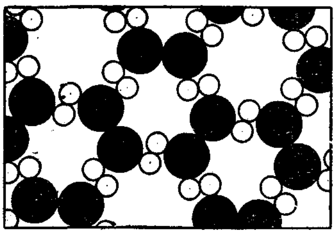
не возросла в миллиард раз) воспринимают как *постоянный напор*. Чтобы сдержать газ в его пределах, к нему нужно приложить давление. На фиг. 1.3 показан обычный сосуд с газом (без него не обходится ни один учебник) — цилиндр с поршнем. Молекулы для простоты изображены теннисными мячиками, или точечками, потому что форма их не имеет значения. Они движутся беспорядочно и непрерывно. Множество молекул беспрерывно колотит о поршень. Их непрекращаемые удары вытолкнут его из цилиндра, если не приложить к поршню некоторую силу — *давление* (сила, собственно,— это давление, умноженное на площадь). Ясно, что сила пропорциональна площади поршня, потому что если увеличить его площадь, сохранив то же количество молекул в каждом кубическом сантиметре, то и число ударов о поршень возрастет во столько же раз, во сколько расширилась площадь.

А если в сосуде число молекул удвоится (и соответственно возрастет их плотность), а скорости их (и соответственно температура) останутся прежними? Тогда довольно точно удвоится и число ударов, а так как каждый из них столь же «энергичен», как и раньше, то выйдет, что давление пропорционально плотности. Если принять во внимание истинный характер сил взаимодействия атомов, то следует ожидать и небольшого спада давления из-за увеличения притяжения между атомами и легкого роста давления из-за увеличения доли общего объема, занятого самими атомами. И все же в хорошем приближении, когда атомов сравнительно немного (т. е. при невысоких давлениях), *давление пропорционально плотности.*

Легко понять и нечто другое. Если повысить температуру газа (скорость атомов), не меняя его плотности, что произойдет с давлением? Двигаясь быстрей, атомы начнут бить по поршню сильней; к тому же удары посыплются чаще — и давление возрастет. Вы видите, до чего просты идеи атомной теории.

А теперь рассмотрим другое явление. Пускай поршень медленно двинулся вперед, заставляя атомы тесниться в меньшем объеме. Что бывает, когда атом ударяет по ползущему поршню? Ясно, что после удара его скорость повышается. Можете это проверить, играя в пинг-понг: после удара ракеткой шарик отлетает от ракетки быстрей, чем подлетал к ней. (Частный пример: неподвижный атом после удара поршня приобретает скорость.) Стало быть, атомы, отлетев от поршня, становятся «горячее», чем были до толчка. Поэтому все атомы в сосуде наберут скорость. Это означает, что *при медленном сжатии газа его температура растет*. Когда медленно *сжимаешь* газ, его температура *повышается*, а когда медленно *расширяешь*, температура *падает*.

Вернемся к нашей капельке воды и посмотрим, что с ней будет, когда температура понизится. Положим, что толчея среди молекул воды постепенно утихает. Меж ними, как мы знаем, существуют силы притяжения; притянувшимся друг к другу молекулам уже нелегко покачиваться и прыгать. На фиг. 1.4 показано, что́ бывает при низких температурах; мы видим уже нечто новое. Образовался *лед*. Конечно, картинка эта опять условна — у льда не два измерения, как здесь изображено, но в общих чертах она справедлива. Интересно, что в этом веществе *у каждого атома есть свое место*, и если каким-то образом мы расставим атомы на одном конце капли каждый на свое место, то за многие километры от него на другом конце (в нашем увеличенном масштабе) из-за жесткой структуры атомных связей тоже возникнет определенная правильная расстановка. Поэтому если потянуть за один конец ледяного кристалла, то за ним, противясь разрыву, потянется и другой — в отличие от воды, в которой эта правильная расстановка разрушена интенсивными движениями атомов. Разница между твердыми и жидкими телами состоит в том, что в твердых телах атомы расставлены в особом порядке, называемом *кристаллической структурой*, и даже в том случае, когда они находятся далеко друг от друга, ничего случайного в их размещении не наблюдается — положение атома на одном конце кристалла определяется положением атомов на другом конце, пусть между ними находятся хоть миллионы атомов. В жидкостях же атомы на дальних расстояниях сдвинуты как попало. На фиг. 1.4 расстановка молекул льда мною выдумана, и хотя кое-какие свойства льда здесь отражены, но в общем она неправильна. Верно схвачена, например, часть шестигранной симметрии кристаллов льда. Посмотрите: если повернуть картинку на 120°, получится то же



Фиг. 1.4. Молекулы льда.

самое расположение. Таким образом, лед имеет *симметрию*, вследствие которой снежинки все шестигранны. Из фиг. 1.4 можно еще понять, отчего, растаяв, лед занимает меньший объем. Смотрите, как много «пустот» на рисунке; у настоящего льда их тоже много. Когда система разрушается, все эти пустоты заполняются молекулами. Большинство простых веществ, за исключением льда и гарта (типографского сплава), при плавлении *расширяется*, потому что в твердых кристаллах атомы упакованы плотнее, а после плавления им понадобится место, чтобы колебаться; сквозные же структуры, наподобие льда, разрушаясь, становятся компактнее.

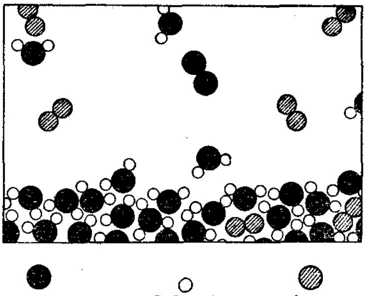
Но хотя лед обладает «жесткой» кристаллической структурой, его температура может тоже меняться, в нем есть запас тепла. Этот запас можно менять по своему желанию. Что же это за тепло? Атомы льда все равно не находятся в покое. Они дрожат и колеблются. Даже когда существует определенный порядок в кристалле (структура), все атомы все же колеблются «на одном месте». С повышением температуры размах их колебаний все растет, пока они не стронутся с места. Это называется *плавлением*. Наоборот, с падением температуры колебания все замирают, пока при абсолютном нуле температуры они не станут наименьшими из возможных (хотя полной остановки не наступит).

Этого минимального количества движения не хватает, чтобы растопить тело. Но есть одно исключение — гелий. Гелий при охлаждении тоже уменьшает движение своих атомов до предела, но даже при абсолютном нуле в них оказывается достаточный запас движения, чтобы предохранить гелий от замерзания. Гелий не замерзает и при абсолютном нуле, если только не сжимать его под высоким давлением. Повышая давление, *можно* добиться затвердения гелия.

§ 3. *Атомные процессы*

Так с атомной точки зрения описываются твердые, жидкие и газообразные тела. Но атомная гипотеза описывает и *процессы*, и мы теперь рассмотрим некоторые процессы с атомных позиций. Первым делом речь пойдет о процессах, происходящих на поверхности воды. Что здесь происходит? Мы усложним себе задачу, приблизим ее к реальной действительности, предположив, что над поверхностью находится воздух. Взгляните на фиг. 1.5. Мы по-прежнему видим молекулы, образующие толщу воды, но, кроме того, здесь изображена и ее поверхность, а над нею — различные молекулы: прежде всего молекулы воды в виде *водяного пара*, который всегда возникает над водной поверхностью (пар и вода находятся в равновесии, о чем мы вскоре будем говорить). Кроме того, над водой витают и другие моле-

Фиг. 1.5. Молекулы воды, испаряющейся в воздух.



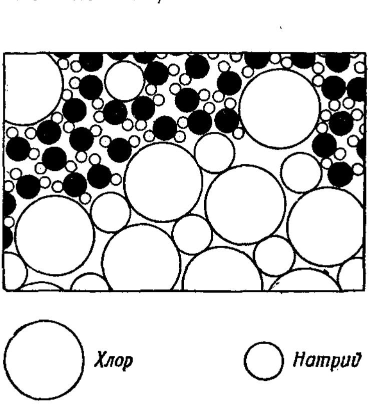
кулы — то скрепленные воедино два атома кислорода, образующие *молекулу кислорода*, то два атома азота, тоже слипшиеся в молекулу азота. Воздух почти весь состоит из азота, кислорода, водяного пара и меньших количеств углекислого газа, аргона и прочих примесей. Итак, над поверхностью воды находится воздух — газ, содержащий некоторое количество водяного пара. Что происходит на этом рисунке? Молекулы воды все время движутся. Время от времени какая-нибудь из молекул близ поверхности получает толчок сильнее остальных и выскакивает вверх. На рисунке этого, конечно, не видно, потому что здесь все *неподвижно*. Но попробуйте просто представить себе, как одна из молекул только что испытала удар и взлетает вверх, а с другой случилось то же самое и т. д. Так, молекула за молекулой вода исчезает — она испаряется. Если *закрыть* сосуд, мы обнаружим среди молекул находящегося в нем воздуха множество молекул воды. То и дело некоторые из них снова попадают в воду и остаются там. То, что казалось нам мертвым и неинтересным (скажем, прикрытый чем-нибудь стакан воды, который, может быть, 20 лет простоял на своем месте), на самом деле таит в себе сложный и интересный, беспрерывно идущий динамический процесс. Для нашего грубого глаза в нем ничего не происходит, но стань мы в миллиард раз зорче, мы бы увидали, как все меняется: одни молекулы взлетают, другие оседают.

Почему же мы *не видим этих изменений*? Да потому, что сколько взлетает молекул, столько же и оседает! В общем-то там «ничего не происходит». Если раскрыть стакан и сдуть влажный воздух, на смену ему притечет уже сухой; число молекул, покидающих воду, останется прежним (оно ведь зависит только от движения в воде), а число возвращающихся молекул сильно уменьшится, потому что их уже над водой почти не будет. Число улетающих молекул превысит число оседающих, вода начнет испаряться. Поэтому, если вам нужно испарять воду, включайте вентилятор!

Но это еще не все. Давайте подумаем, какие молекулы вылетают из воды? Если уж молекула выскочила, то это значит, что она случайно вобрала в себя излишек энергии; он ей понадобился, чтобы разорвать путы притяжения соседей. Энергия вылетающих молекул превосходит среднюю энергию молекул в воде, поэтому энергия остающихся молекул *ниже* той, которая была до испарения. Движение их уменьшается. Вода от испарения постепенно *остывает*. Конечно, когда молекула пара опять оказывается у поверхности воды, она испытывает сильное притяжение и может снова попасть в воду. Притяжение разгоняет ее, и в итоге возникает тепло. Итак, уходя, молекулы уносят тепло; возвращаясь — приносят. Когда стакан закрыт, баланс сходится, температура воды не меняется. Если же дуть на воду, чтобы испарение превысило оседание молекул, то вода охлаждается. Поэтому, чтобы остудить суп, дуйте на него!

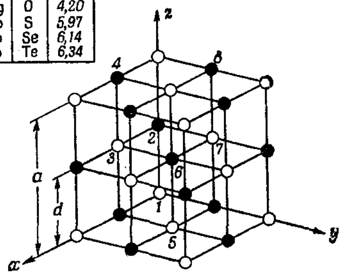
Вы понимаете, конечно, что на самом деле все происходит гораздо сложнее, чем здесь описано. Не только вода переходит в воздух, но молекулы кислорода или азота время от времени переходят в воду и «теряются» в массе молекул воды. Попадание атомов кислорода и азота в воду означает растворение воздуха в воде; если внезапно из сосуда воздух выкачать, то молекулы воздуха начнут из воды выделяться быстрее, чем проникают в нее; мы увидим, как наверх подымаются пузырьки. Вы, наверно, слыхали, что это явление очень вредно для ныряльщиков.

Перейдем теперь к другому процессу. На фиг. 1.6 мы видим, как (с атомной точки зрения) соль растворяется в воде. Что получается, если в воду бросить кристаллик соли? Соль — твердое тело, кристалл, в котором «атомы соли» расставлены правильными рядами. На фиг. 1.7 показано трехмерное строение обычной соли (хлористого натрия). Строго говоря, кристалл состоит не из атомов, а из *ионов*. Ионы — это атомы с излишком или с не-



Фиг. 1.6. Молекулы соли, растворяющейся в воде.

Кристалл	●	○	*a*, Å
Каменная соль	Na	Cl	5,64
Сильвин	K	Cl	6,28
	Ag	Cl	5,54
	Mg	O	4,20
Свинцовый блеск	Pb	S	5,97
	Pb	Se	6,14
	Pb	Te	6,34



Расстояние до ближайшего соседа d=a/2

Фиг. 1.7. Структура кристалла соли.

хваткой электронов. В кристалле соли мы находим ионы хлора (атомы хлора с лишним электроном) и ионы натрия (атомы натрия, лишенные одного электрона). Ионы в твердой соли скреплены друг с другом электрическим притяжением, но в воде некоторые из них, притянувшись к положительному водороду или отрицательному кислороду, начинают свободно двигаться. На фиг. 1.6 виден освободившийся ион хлора и другие атомы, плавающие в воде в виде ионов. На рисунке нарочно подчеркнуты некоторые детали процесса. Заметьте, например, что водородные концы молекул воды обычно обступают ион хлора, а возле иона натрия чаще оказывается кислород (ион натрия положителен, а атом кислорода в молекуле воды отрицателен, поэтому они притягиваются). Можно ли из рисунка понять, *растворяется* ли здесь соль в воде или же *выкристаллизовывается* из воды? Ясно, что *нельзя*; часть атомов уходит из кристалла, часть присоединяется к нему. Процесс этот *динамический*, подобный испарению; все зависит от того, много или мало соли в воде, в какую сторону нарушено равновесие. Под равновесным понимается такое состояние, когда количество уходящих атомов равно количеству приходящих. Если в воде почти нет соли, то больше атомов уходит в воду, чем возвращается из воды: соль растворяется. Если же «атомов соли» слишком много, то приход превышает уход, и соль выпадает в кристаллы.

Мы мимоходом упомянули, что понятие *молекулы* вещества не совсем точно и имеет смысл только для некоторых видов веществ. Оно применимо к воде, в ней действительно три атома всегда скреплены между собой, но оно не очень подходит к твердому хлористому натрию. Хлористый натрий — это ионы хлора и натрия, образующие кубическую структуру. Нельзя естественным путем сгруппировать их в «молекулы соли».

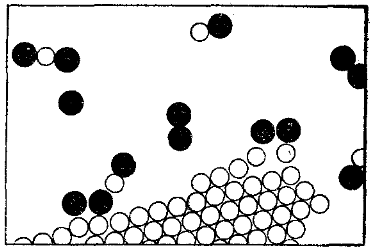
Вернемся к вопросу о растворении и осаждении соли. Если повысить температуру раствора соли, то возрастет и число растворяющихся атомов и число осаждаемых. Оказывается, что в общем случае трудно предсказать, в какую сторону сдвинется процесс, быстрей или медленней пойдет растворение. С ростом температуры большинство веществ начинает растворяться сильней, а у некоторых растворимость падает.

§ 4. *Химические реакции*

Во всех описанных процессах атомы и ионы не меняли своих напарников. Но, конечно, возможны обстоятельства, в которых сочетания атомов меняются, образуя новые молекулы. Это показано на фиг. 1.8. Процесс, в котором атомные партнеры меняются местами, называется *химической реакцией*. Описанные нами прежде процессы называются физическими, но трудно указать резкую границу между теми и другими. (Природе все равно, как мы это назовем, она просто делает свое дело.) На картинке мы хотели показать, как уголь горит в кислороде. Молекула кислорода состоит из *двух* атомов, сцепленных очень крепко. (А почему не из *трех* или даже не из *четырех*? Такова одна из характерных черт атомных процессов: атомы очень разборчивы, им нравятся определенные партнеры, определенные направления и т. д. Одна из обязанностей физики — разобраться, почему они хотят именно то, что хотят. Во всяком случае *два* атома кислорода, довольные и насыщенные, образуют молекулу.)

Предположим, что атомы углерода образуют твердый кристалл (графит или алмаз*). Одна из молекул кислорода может пробраться к углероду, каждый ее атом подхватит по атому углерода и улетит в новом сочетании углерод — кислород. Такие молекулы образуют газ, называемый угарным. Его химическое имя СО. Что это значит? Буквы СО — это фактически картинка такой молекулы: С — углерод, О — кислород. Но углерод притягивает к себе кислород намного сильнее, чем кислород притягивает кислород или углерод — углерод. Поэтому кислород для этого процесса может поступать с малой энергией, но, схватываясь с неимоверной жадностью и страстью с углеродом, высвобождает энергию, поглощаемую всеми соседними атомами. Образуется большое количество энергии движения (кинетической энергии). Это, конечно, и есть *горение*; мы получаем *тепло* от сочетания кислорода и углерода. Теплота в обычных условиях проявляется в виде движения молекул нагретого газа, но иногда ее может быть так много, что она вызывает и *свет*. Так получается *пламя*.

* Алмаз тоже *может* сгореть в воздухе.



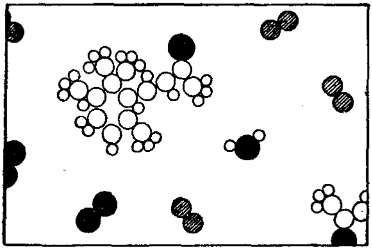
Фиг. 1.8. Уголь, горящий в кислороде.

Вдобавок молекулы CO могут не удовольствоваться достигнутым. У них есть возможность подсоединить еще один атом кислорода; возникает более сложная реакция: кислород в паре с углеродом столкнется с другой молекулой CO. Атом кислорода присоединится к CO и в конечном счете образуется молекула из одного углерода и двух кислородов. Ее обозначают CO_2 и называют углекислым газом. Когда углерод сжигают очень быстро (скажем, в моторе автомашины, где взрывы столь часты, что углекислота не успевает образоваться), то возникает много угарного газа. Во многих таких перестановках атомов выделяется огромное количество энергии, наблюдаются взрывы, вспыхивает пламя и т. д.; все зависит от реакции.

Химики изучили эти расположения атомов и установили, что любое вещество — это свой тип *расположения атомов*.

Чтобы объяснить эту мысль, рассмотрим новый пример. У клумбы фиалок вы сразу чувствуете их «запах». Это значит, что в ваш нос попали *молекулы*, или расположения атомов особого рода. *Как* они туда попали? Ну, это просто. Раз запах — это молекулы особого рода, то, двигаясь и сталкиваясь повсюду, они *случайно* могли попасть и в нос. Конечно, они не стремились попасть туда. Это просто беспомощные толпы молекул, и в своих бесцельных блужданиях эти осколки вещества, случается, оказываются и в носу.

И вот химики могут взять даже такие необычные молекулы, как молекулы запаха фиалок, проанализировать их строение и описать нам *точное расположение* их атомов в пространстве. Мы, например, знаем, что молекула углекислого газа пряма и симметрична: O—C—O (это легко обнаружить и физическими методами). Но и для безмерно более сложных, чем те, с которыми имеет дело химия, расположений атомов можно после долгих увлекательных поисков понять, как выглядит это расположение. На фиг. 1.9 изображен воздух над фиалками. Снова мы находим здесь азот, кислород, водяной пар... (А он-то откуда здесь? От *влажных* фиалок. Все растения испаряют воду.) Среди них, однако, витает «чудовище», сложенное из атомов углерода, водорода и кислорода, облюбовавших для себя особого вида расположение. Это расположение намного сложнее, чем у



Фиг. 1.9. Запах фиалки.

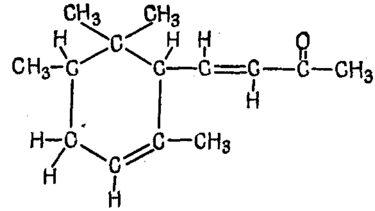
углекислоты. К сожалению, мы не можем его нарисовать: хотя оно известно химикам очень точно, но оно ведь трехмерное, а как его изобразишь в двух измерениях?! Как нарисовать шесть углеродов, которые образуют кольцо, но не плоское, а «гармошкой»? Все углы, все расстояния в ней известны. Так вот, химическая *формула* — это просто картина такой молекулы. Когда химик пишет формулу на доске, он, грубо говоря, пытается нарисовать молекулу в двух измерениях. Например, мы видим кольцо из шести углеродов; углеродную цепочку, свисающую с одного конца; кислород, торчащий на конце цепочки; три водорода, привязанные вон к тому углероду; два углерода и три водорода, прилепленные вот здесь, и т. д.

Как же химик узнает, что это за расположение? Возьмет он две пробирки с веществом, сольет их содержимое и смотрит: если смесь покраснела, значит, к такому-то месту молекулы прикреплен один водород и два углерода; если посинела, то... то это ничего не значит. Органическая химия может поспорить с самыми фантастическими страницами детективных романов. Чтобы узнать, как расположены атомы в какой-нибудь невероятно сложной молекуле, химик смотрит, что будет, если смешать два разных вещества! Да физик нипочем не поверит, что химик, описывая расположение атомов, понимает, о чем говорит. Но вот уже больше 20 лет, как появился физический метод, который позволяет разглядывать молекулы (не такие сложные, но по крайней мере родственные) и описывать расположение атомов не по цвету раствора, а по *измерению расстояний между атомами*. И что же? Оказалось, что химики почти никогда не ошибаются!

Оказывается, что действительно в запахе фиалок присутствуют три слегка различные молекулы, они отличаются только расстановкой атомов водорода.

Одна из проблем в химии — это придумать такое название для вещества, чтобы по нему можно было бы узнать, какое оно. Найти имя для его формы! Но оно должно описывать не только форму, а указывать еще, что здесь стоит кислород, а вон там — водород, чтобы было точно отмечено, где что стоит. Теперь вы понимаете, почему химические названия так сложны. Это не

Фиг. 1.10. Структурная формула запаха фиалки.



сложность, а полнота. Название молекулы запаха фиалок поэтому таково: 4-(2,2,3,6-тетраметил-5-циклогексан)-3-бутен-2-он. Оно полностью описывает строение молекулы (изображенной на фиг. 1.10), а его длина объясняется сложностью молекулы. Дело, значит, вовсе не в том, что химики хотят затуманить мозги, просто им приходится решать сложнейшую задачу описания молекулы словами!

Но откуда мы все-таки *знаем*, что атомы существуют? А здесь идет в ход уже описанный прием: мы *предполагаем* их существование, и все результаты один за другим оказываются такими, как мы предскажем,—какими они должны быть, если все *состоит* из атомов. Существуют и более прямые доказательства. Вот одно из них. Атомы так малы, что ни в какой микроскоп их не увидишь (даже в *электронный*, а уж в световой и подавно). Но атомы все время движутся, и если бросить в воду большой шарик (большой по сравнению с атомами), то и он начнет подрагивать. Все равно как в игре в пушбол, где большущий мяч толкают с разных сторон две команды. Толкают в разных направлениях, и куда мяч покатится, не угадаешь. Точно так же будет двигаться и «большой мяч» в воде: в разные моменты времени с разных сторон на него будут сыпаться неодинаковые удары. Поэтому когда мы глядим в хороший микроскоп на мельчайшие частички в воде, то видим их непрерывное метание — итог бомбардировки их атомами. Называется это *броуновским движением*.

Другие доказательства существования атомов можно извлечь из строения кристаллов. Во многих случаях их строение, определенное из опытов по прохождению рентгеновских лучей через кристаллы, согласуется по своему пространственному расположению с формой самогó природного кристалла. Углы между разными гранями кристалла согласуются с точностью не до градусов, а до секунд дуги с углами, высчитанными в предположении, что кристалл сложен из множества «слоев» атомов.

Все состоит из атомов. Это самое основное утверждение. В биологии, например, самое важное предположение состоит в том, что *все, что делает животное, совершают атомы*. Иными словами, *в живых существах нет ничего, что не могло бы быть понято с той точки зрения, что они состоят из атомов, дейст-*

вующих по законам физики. Когда-то это не было еще ясно. Потребовалось немало опытов и размышлений, прежде чем высказать это предположение, но теперь оно повсеместно принято и приносит огромную пользу, порождая новые идеи в области биологии.

Да посудите сами! Если уж стальной кубик или кристаллик соли, сложенный из одинаковых рядов одинаковых атомов, может обнаруживать такие интересные свойства; если вода — простые капельки, неотличимые друг от друга и покрывающие миля за милей поверхность Земли,— способна порождать волны и пену, гром прибоя и странные узоры на граните набережной; если все это, все богатство жизни вод — всего лишь свойства сгустков атомов, то *сколько же еще в них скрыто возможностей*? Если вместо того, чтобы выстраивать атомы по ранжиру, строй за строем, колонну за колонной, даже вместо того, чтобы сооружать из них замысловатые молекулы запаха фиалок, если вместо этого располагать их *каждый раз по-новому*, разнообразя их мозаику, не повторяя того, что уже было,— представляете, сколько необыкновенного, неожиданного может возникнуть в их поведении. Разве не может быть, что те «тела», которые разгуливают по улице и беседуют с вами, тоже не что иное, как сгустки атомов, но такие сложные, что уже не хватает фантазии предугадывать по их виду их поведение. Когда мы называем себя сгустками атомов, это не значит, что мы — *только* собрание атомов, потому что такой сгусток, который никогда не повторяется, прекрасно может оказаться способным и на то, чтобы сидеть у стола и читать эти строки.

Глава 2

ОСНОВНЫЕ ФИЗИЧЕСКИЕ ВОЗЗРЕНИЯ

§ 1. Введение

В этой главе будут рассмотрены самые основные представления о физике; здесь будет идти речь о том, как теперь мы представляем себе природу вещей. Я не буду рассказывать историю того, как стало известно, что эти представления правильны; это мы отложим до другого раза.

Предмет науки предстает перед нами во множестве проявлений, в обилии признаков. Спуститесь к морю, вглядитесь в него. Это ведь не просто вода. Это вода и пена, это рябь и набегающие волны, это облака, солнце и голубое небо, это свет и тепло, шум и дыхание ветра, это песок и скалы, водоросли и рыба, их жизнь и гибель, это и вы сами, ваши глаза и мысли, ваше ощущение счастья. И не то ли в любом другом месте, не такое ли разнообразие явлений и влияний? Вы не найдете в природе ничего простого, все в ней перепутано и слито. А наша любознательность требует найти в этом простоту, требует, чтобы мы ставили вопросы, пытались ухватить суть вещей и понять их многоликость как возможный итог действия сравнительно небольшого количества простейших процессов и сил, на все лады сочетающихся между собой.

И мы спрашиваем себя: отличается ли песок от камня? Быть может, это всего лишь множество камешков? А может, и Луна — огромный камень? Тогда, поняв что такое камни, не поймем ли мы тем самым природу песка и Луны? А ветер — что это такое? Может, это всплески воздуха, как вон те всплески воды у берега? Что общего между всяким движением? А есть ли что-нибудь общее между всевозможными звуками? Сколько получится, если пересчитать все цвета? И так далее и так далее. Вот так мы постепенно пробуем проанализировать все вокруг, связать то, что кажется несвязуемым, в надежде, что удастся *уменьшить* количество *различных* явлений и тем самым их лучше понять.

Способ получать частичные ответы на подобные вопросы был придуман еще несколько сот лет назад. *Наблюдение*, *размышление* и *опыт* — вот что составляет так называемый *научный метод*. Мы ограничимся здесь только голым описанием фундаментальных идей физики, основ мировоззрения, возникшего в физике от применения научного метода.

Что значит «понять» что-либо? Представьте себе, что сложный строй движущихся объектов, который и есть мир,— это что-то вроде гигантских шахмат, в которые играют боги, а мы следим за их игрой. В чем правила игры, мы не знаем; все, что нам разрешили,— это *наблюдать* за игрой. Конечно, если посмотреть подольше, то кое-какие правила можно ухватить. Под *основными физическими воззрениями*, под *фундаментальной физикой* мы понимаем *правила игры*. Но, даже зная все правила, можно не понять какого-то хода просто из-за его сложности или ограниченности нашего ума. Тот, кто играет в шахматы, знает, что правила выучить легко, а вот понять ход игрока или выбрать наилучший ход порой очень трудно. Ничуть не лучше, а то и хуже обстоит дело в природе. Не исключено, что в конце концов все правила будут найдены, но пока отнюдь не все они нам известны. То и дело тебя поджидает рокировка или какой-нибудь другой непонятный ход. Но, помимо того, что мы не знаем всех правил, лишь очень и очень редко нам удается действительно объяснить что-либо на их основе. Ведь почти все встречающиеся положения настолько сложны, что нет никакой возможности, заглядывая в правила, проследить за планом игры, а тем более предугадать очередной ход. Приходится поэтому ограничиваться самыми основными правилами. Когда мы разбираемся в них, то уже считаем, что «поняли» мир.

Но откуда мы знаем, что те правила, которые мы «ощущаем», справедливы на самом деле? Ведь мы не способны толково разобрать ход игры. Существует, грубо говоря, три способа проверки. Во-первых, мыслимы положения, когда природа устроена (или мы ее устраиваем) весьма просто, всего из нескольких частей; тогда можно точно предсказать все, что случится, проверив тем самым правила. (В углу доски может оказаться всего несколько фигур, и все их движения легко себе представить.)

Есть и второй довольно неплохой путь проверки правил: надо из этих правил вывести новые, более общие. Скажем, слон ходит только по диагонали; значит, сколько бы он ни ходил, он всегда окажется, например, на черном поле. Стало быть, не вникая в детали, наши представления о движении слона всегда можно проверить по тому, остается ли он все время на черном поле. Конечно, не исключено, что внезапно слон очутится на *белом* поле: после того как его побили, пешка прошла на последнюю горизонталь и превратилась в белопольного слона. Так же и в физике. Долгое время мы располагаем правилом, которое превосходно работает повсюду, даже когда детали процесса нам неизвестны, и вдруг иногда всплывает *новое правило*. С точки зрения физических основ самые интересные явления происходят в *новых* местах, там, где правила не годятся, а не в тех местах, где они *действуют*! Так открываются новые правила.

Есть и третий способ убедиться, что наши представления об игре правильны; мало оправданный по существу, он, пожалуй, самый мощный из всех способов. Это путь *грубых приближений*. Мы можем не знать, почему Алехин пошел *именно этой фигурой*. Но в *общих чертах* мы можем понимать, что он, видимо, собирает все фигуры для защиты короля, и сообразить, что в сложившихся обстоятельствах это самое разумное. Точно так же мы часто более или менее понимаем природу, хотя не знаем и не понимаем *каждого хода отдельной фигуры*.

Когда-то все явления природы грубо делили на классы — теплота, электричество, механика, магнетизм, свойства веществ, химические явления, свет (или оптика), рентгеновские лучи, ядерная физика, тяготение, мезонные явления и т. д. Цель-то, однако, в том, чтобы понять *всю природу* как разные стороны *одной совокупности* явлений. В этом задача фундаментальной теоретической физики нынешнего дня: *открыть законы, стоящие за опытом, объединить эти классы*. Исторически всегда рано или поздно удавалось их слить, но проходило время, возникали новые открытия, и опять вставала задача их включения в общую схему. Однажды уже возникла было слитная картина мира — и вдруг были открыты лучи Рентгена... Со временем произошло новое слияние... и тут обнаружили существование мезонов. Поэтому на любой стадии игра выглядит беспорядочно, незаконченно. Многое бывает объяснено с единой точки зрения, но всегда какие-то проволочки и нитки все же болтаются, всегда где-нибудь торчит что-то несуразное. Таково сегодняшнее положение вещей, которое мы попытаемся описать.

Вот взятые из истории примеры слияния. Во-первых, *теплоту* удалось свести к *механике*. Чем сильнее движение атомов, тем больше запас тепла системы; выходит, что *теплота, да и все температурные эффекты, могут быть поняты с помощью законов механики*. Другое величественное объединение было отпраздновано, когда обнаружилась связь между электричеством, магнетизмом и светом. Оказалось, что это разные стороны одной сущности; сейчас мы называем ее *электромагнитным полем*. А химические явления, свойства различных веществ и поведение атомных частиц объединились *квантовой химией*.

Возникает естественный вопрос: будет ли возможно в конце концов *все* слить воедино и обнаружить, что весь наш мир есть просто различные стороны какой-то *одной* вещи? Этого никто не знает. Мы только знаем, что по мере нашего продвижения вперед то и дело удается что-то с чем-то объединить, а после опять что-то перестает укладываться в общую картину, и мы заново принимаемся раскладывать части головоломки, надеясь сложить из них что-нибудь целое. А сколько частей в головоломке, и будет ли у нее край — это никому не известно. И не будет известно, пока мы не сложим всей картины, если только когда-нибудь это вообще будет сделано. Здесь мы хотим только показать, насколько далеко зашел процесс слияния, как сегодня обстоит дело с объяснением основных явлений за счет наименьшего количества принципов. Или, выражаясь проще, *из чего все состоит и сколько всего таких элементов*?

§ 2. Физика до 1920 года

Нам было бы нелегко начать прямо с сегодняшних взглядов. Посмотрим лучше, как выглядел мир примерно в 1920 г., а затем сотрем с этой картины лишнее.

До 1920 г. картина была примерно такова. «Сцена», на которой выступает Вселенная, — это трехмерное *пространство*, описанное еще Евклидом; все изменяется в среде, называемой *временем*. Элементы, выступающие на сцене,— это *частицы*, например атомы; они обладают известными свойствами, скажем свойством инерции: когда частица движется в каком-то направлении, то делает она это до тех пор, пока на нее не подействуют *силы*. Следовательно, второй элемент — это *силы*; считалось, что они бывают двух сортов. Первый, чрезвычайно запутанный тип — сила взаимодействия, т. е. сила, скрепляющая атомы в разных их комбинациях; она, например, и решает, быстрее или медленнее начнет растворяться соль при нагревании. Другой же сорт сил — это взаимодействие на далеких расстояниях— притяжение, спокойное и ровное; оно меняется обратно пропорционально квадрату расстояния и именуется *тяготением*, или *гравитацией*. Закон ее известен и прост. Но *почему* тела остаются в движении, начав двигаться, или *отчего* существует закон тяготения — это было неизвестно.

Продолжаем наше описание природы. С этой точки зрения газ, как, впрочем, и *все* вещество, это мириады движущихся частиц. Таким образом, многое из увиденного нами на морском берегу теперь запросто увязывается в единое целое. Давление сводится к ударам атомов о стенки; снос атомов (их движение в одну сторону) — это ветер; *хаотические* внутренние движения — это *теплота*. Волны — избыток давления, места, где собралось слишком много частиц; разлетаясь, они нагнетают в новых местах такие же скопления частиц; эти волны избытка плотности суть *звуки*. Понять все это было немаловажным достижением (кое о чем мы уже писали в предыдущей главе).

Какие *сорта* частиц существуют? В то время считалось, что их 92; восемьдесят девять типов атомов были к тому времени открыты. Каждый тип имел свое название.

Дальше возникала проблема: *что такое силы близкодействия*. Почему атом углерода притягивает один, в лучшем случае два атома кислорода, но не более? В чем механизм взаимодействия между атомами? Уж не тяготение ли это? Нет. Оно чересчур слабо для этого. Надо представить себе силу, сходную с тяготением, тоже обратно пропорциональную квадрату расстояния, но несравненно более мощную. У нее есть еще одно отличие. Тяготение — это всегда притяжение; допустим теперь, что бывают «предметы» *двоякого сорта*, и эта новая сила (имеется, конечно, в виду электричество) обладает таким свойством, что одинаковые сорта *отталкиваются*, а разные *притягиваются*. «Предмет», несущий с собой это сильное взаимодействие, называется *зарядом*.

Что же тогда получается? Положим, что два различных сорта (плюс и минус) приложены друг к другу вплотную. Третий заряд находится вдалеке. Почувствует ли он притяжение? *Практически нет*, если первые два одинаковы по величине: притяжение одного и отталкивание другого уравновесятся. Значит, на заметных расстояниях сила незаметна. Но когда третий заряд *приблизится вплотную*, то возникнет *притяжение*: отталкивание однородных зарядов и притяжение разнородных будут стремиться свести между собой разнородные заряды и удалить друг от друга однородные. В итоге отталкивание окажется слабее притяжения. По этой причине атомы, слагающиеся из положительных и отрицательных зарядов, мало влияют друг на друга на заметных расстояниях. Зато уж если они сблизятся, то свободно могут «разглядывать изнутри» друг друга, перестраивать расположение своих зарядов и сильно взаимодействовать. В конечном итоге именно *электрическая* сила объясняет взаимодействие атомов. Сила эта столь велика, что все плюсы и минусы обычно вступают в предельно тесную связь друг с другом: они стянуты насколько возможно. Все тела, даже наши собственные, состоят из мельчайших плюс- и минус-долек, очень сильно взаимодействующих друг с другом. Количество плюсов и минусов хорошо сбалансировано. Только на мгновение случайно можно соскрести несколько плюсов или минусов (обычно минусы соскребать легче); тогда электрическая сила окажется *неуравновешенной* и можно почувствовать действие электрического притяжения.

Чтобы дать представление о том, насколько электричество сильнее тяготения, расположим две песчинки размером в миллиметр в 30 *м* одна от другой. Пусть все заряды только притягиваются и их взаимодействие друг на друга внутри песчинок не погашается взаимно. С какой силой эти две песчинки притягивались бы? С силой в *три миллиона тонн*! Понимаете теперь, почему *малейшего* избытка или нехватки положительных или отрицательных зарядов достаточно, чтобы произвести заметное электрическое действие? По той же причине заряженные тела не отличаются ни по массе, ни по размеру от незаряженных: нужно слишком мало частиц, чтобы зарядить тело, чтобы почувствовалось, что оно заряжено.

Зная все это, легко было представить себе и устройство атома. Считалось, что в центре его положительно заряженное электричеством очень массивное «ядро», оно окружено некоторым числом «электронов», очень легких и заряженных отрицательно. Забегая вперед, заметим, что впоследствии в самом ядре были обнаружены два рода частиц — протоны и нейтроны, весьма тяжелые и обладающие близкими массами. Протоны заряжены положительно, а нейтроны не заряжены вовсе. Когда в ядре атома имеется шесть протонов и ядро окружено шестью электронами (отрицательные частицы обычного мира материальных тел — все электроны, они намного легче протонов и нейтронов), то этот атом в химической таблице стоит под номером 6 и называется углеродом. Атом, имеющий номер 8, называется кислородом, и т. д. Химические свойства зависят от внешней *оболочки* — электронов, а точнее, только от того, *сколько* их там; все *химические* особенности вещества зависят от одного-единственного числа — количества электронов. (Список названий элементов, составленный химиками, на самом деле может быть заменен нумерацией 1, 2, 3 и т. д. Вместо того чтобы говорить «углерод», можно было бы сказать «элемент шесть», подразумевая шесть электронов. Но, конечно, когда открывали элементы, не подозревали, что их можно так пронумеровать; к тому же именовать их по номерам не очень удобно. Лучше, чтобы у каждого из них было собственное имя и символ.)

И еще многое другое стало известно об электрической силе. Естественно было бы толковать электрическое взаимодействие как простое притяжение двух предметов, положительно и отрицательно заряженных. Однако выяснилось, что такой подход плохо помогает уяснению природы электрической силы. Толкование, более отвечающее положению вещей, таково: когда где-то имеется положительный заряд, то он искривляет в каком-то смысле пространство, создает в нем некоторое условие для того, чтобы минус-заряд, помещенный в это пространство, ощутил действие силы. Эта возможность порождать силы называется *электрическим полем*. Когда электрон помещен в электрическое поле, мы говорим, что он «притягивается». При этом действуют два правила: а) заряды создают поле и б) на заряды в поле действуют силы, заставляя их двигаться. Причина этого станет ясна,когда мы разберем следующее явление. Если мы зарядим тело, скажем расческу, электричеством, а затем положим рядом заряженный клочок бумаги и начнем водить расческой взад и вперед, то бумага будет все время поворачиваться к расческе. Ускорив движение расчески, можно обнаружить, что бумага несколько отстает от ее движения, возникает *запаздывание действия*. (Сперва, когда мы водим расческой медленно, дело усложняется *магнетизмом*. Магнитные влияния появляются, когда заряды *движутся друг относительно друга*, так что магнитные и электрические силы в действительности могут оказаться проявлениями одного и того же поля, двумя сторонами одного и того же явления. Изменяющееся электрическое поле не может существовать без магнитного действия.) Если бумагу отодвинуть, запаздывание возрастет. И тогда наблюдается интересная вещь. Хотя сила, действующая между двумя заряженными телами, изменяется обратно *квадрату* расстояния, при колебаниях заряда его влияние *простирается намного дальше*, чем можно было ожидать. Это значит, что оно уменьшается медленнее, чем по закону обратных квадратов.

Что-то похожее на это происходит, если в бассейн с водой брошен поплавок; можно подействовать на него «непосредственно», бросив в воду поблизости другой поплавок; при этом если вы смотрели *только на поплавки* (не на воду), то вы увидите лишь, что один из них сместился в ответ на движения другого, т. е. что между ними существует какое-то *взаимодействие*. А ведь дело только в том, что вы взволновали *воду*: это *вода* шевельнула второй поплавок. Из этого можно даже вывести «закон»: если шевельнуть чуть-чуть поплавок, все соседние поплавки зашевелятся. Будь поплавок подальше, он бы едва покачнулся, ведь мы возмутили поверхность воды один раз и *в одном месте*. Но когда мы начнем непрерывно покачивать поплавок, возникнет новое явление: побегут *волны* и влияние колебаний поплавка распространится *намного дальше*. Это будет колебательное влияние, и уж его не объяснить прямым взаимодействием поплавков. Мысль о непосредственном взаимодействии придется заменить предположением о существовании воды или, для электрических зарядов, того, что называется *электромагнитным полем*.

Электромагнитное поле может передавать волны; одни волны — это *световые*, другие — *радиоволны*, общее же их название *электромагнитные волны*. Частота колебаний этих волн *разная*. *Только этим* они и отличаются одна от другой. Все чаще и чаще колебля заряд вверх-вниз и наблюдая затем, что получится, мы увидим разные эффекты; все они могут быть сведены в единую систему, если дать каждому свой номер —

число колебаний в секунду. Обычные помехи от тока, текущего по проводам в жилых домах, имеют частоту порядка сотни колебаний в секунду. Повысив частоту до 500—1000 килогерц (1 *кгц*=1000 колебаний в секунду), мы из квартиры выйдем «на воздух», потому что это — область радиочастот. (*Воздух* здесь, конечно, не при чем! Радиоволны распространяются и в безвоздушном пространстве.) Увеличив еще частоты, мы доберемся до ультракоротких волн и телевидения. Затем пойдут совсем короткие волны, их назначение — *радиолокация*. Еще дальше, и нам уже не нужно приборов, чтобы регистрировать эти волны, их можно видеть невооруженным глазом. В полосе частот от $5\cdot10^{14}$ до $5\cdot10^{15}$ *гц* колебания заряженной расчески (если наловчиться колебать ее так быстро) предстали бы перед нами в зависимости от частоты как красный, голубой или фиолетовый свет. Частоты с одной стороны полосы называются инфракрасными, а с другой — ультрафиолетовыми. Тот факт, что мы способны видеть на определенных частотах, с физической точки зрения не делает эту часть электромагнитного спектра более впечатляющей, но с человеческой точки зрения это, конечно, самая интересная часть спектра. Продвигаясь по частоте еще дальше, мы получим рентгеновские лучи; это всего лишь высокочастотный свет. А еще дальше пойдет гамма-излучение (табл. 2.1). Гамма-излучение и рентгеновские лучи — почти одно и то же. Обычно те электромагнитные волны, которые исходят от ядер, называют гамма-излучением, а те, которые исходят от атомов,— рентгеновскими лучами, но если их частота совпадет, то физически эти волны уже не отличишь, каков бы ни был их источник. Волны еще более высоких частот, скажем 10^{24} *гц*, можно, оказывается, получать искусственно, на ускорителях; на синхротроне в КАЛТЕХе это делается.

Таблица 2.1 • ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЙ СПЕКТР

Частоты, *гц*	Название	Общее поведение
10^2	Электрические возмущения	Поле
$5\cdot10^5$—$5\cdot10^6$	Радиоволны	Волны
10^8	Ультракороткие волны и телевидение	
10^{10}	Радиолокация	
$5\cdot10^{14}$—$5\cdot10^{15}$	Свет	
10^{18}	Рентгеновские лучи	Частицы
10^{21}	Гамма-излучение (ядерное)	
10^{24}	» («искусственное»)	
10^{27}	» (в космических лучах)	

И наконец, неслыханно высокие частоты (в тысячу раз больше) обнаруживаются далее в волнах, присутствующих в *космических лучах*. Эти волны мы уже не умеем контролировать.

§ 3. Квантовая физика

Мы описали электромагнитное поле и поняли, что оно может передаваться как волны. Сейчас мы увидим, что на самом деле эти волны ведут себя очень странно: они отнюдь не похожи на волны. На высоких частотах они гораздо больше смахивают на *частицы*! Наука, которая умеет объяснять такое странное поведение,— *квантовая механика* — была изобретена вскоре после 1920 г. Еще до этого привычную картину трехмерного пространства и отдельно существующего времени изменил Эйнштейн; сперва он превратил ее в сочетание, называемое «пространство-время», а потом, чтобы объяснить тяготение,— еще и в «*искривленное* пространство-время». Таким образом, «сценой» стало уже пространство-время, а тяготение, по всей вероятности, это видоизмененное пространство-время.

А затем также выяснилось, что и законы движения частиц неверны. Механические законы «инерции» и «силы», законы Ньютона — все они оказались *непригодными* в мире атомов. Было обнаружено, что поведение мельчайших телец *ничем не напоминает* поведения обычных, больших тел. Конечно, физика от этого становится труднее, но зато намного интереснее. Труднее потому, что поведение малых телец совершенно «неестественно»; оно противоречит нашему опыту, оно вообще ни на что не похоже и его нельзя описать никаким иным путем, кроме аналитического; а ведь это требует большого воображения.

Много особенностей есть у квантовой механики. В первую очередь она запрещает считать, что частица может двигаться через определенное точно указанное место с определенной точно указанной скоростью. Чтоб показать, насколько ошибочна обычная механика, отметим, что в квантовой механике имеется правило, согласно которому никто в одно и то же время не может знать и место и быстроту движения частицы. Неопределенность в импульсе и неопределенность в положении частицы дополняют друг друга: их произведение постоянно. Мы пока напишем это правило в виде $\Delta x\ \Delta p \geqslant h/2\pi$, не вникая в подробности. Это правило представляет собой объяснение таинственного парадокса: раз атомы сделаны из плюс- и минус-зарядов, отчего бы минус-зарядам просто не усесться на плюс-заряды (они ведь притягиваются), отчего бы им не сблизиться до того тесно, что они погасят друг друга? *Почему атомы столь велики*? Почему ядро находится в центре, а электроны — вокруг него? Сперва объясняли это тем, что ядро очень велико; но ведь это не так, оно *очень мало*. Диаметр атома примерно 10^{-8} *см*, а ядра—что-то около 10^{-13} *см*. Чтобы увидеть ядро, надо было бы атом увеличить до размеров комнаты, и то ядро казалось бы малюсеньким, едва-едва различимым пятнышком; при этом все же почти *весь вес* атома приходился бы на бесконечно маленькое *ядро*. Но почему же электроны не падают на него? А вот из-за того же принципа неопределенности: если б электроны оказались в ядре, мы бы очень точно знали их положение и, следовательно, их импульс непременно должен был бы стать очень *большим* (но неопределенным), а, значит, *кинетическая энергия* тоже резко бы возросла. С такой энергией он бы выскочил из ядра. Немудрено, что ядро идет на соглашение с электронами: они оставляют себе какое-то место для этой неопределенности и затем колеблются с некоторым наименьшим запасом движения, лишь бы не нарушить этого правила. (Вспомните еще, что когда кристалл охлажден до абсолютного нуля, мы считаем, что атомы все же не прекращают своего движения, они все еще колеблются. Почему? Да если бы атомы остановились, мы бы знали и то, что они стоят, и где стоят, а это противоречит принципу неопределенности. Мы не смеем знать и где они и сколь быстро движутся, вот атомы и вынуждены беспрерывно дрожать!)

А вот другое интереснейшее изменение в идеях и философии науки, осуществленное квантовой механикой: невозможно никогда предсказать *точно*, что произойдет в каких-то обстоятельствах. Например, можно приготовить атом, способный излучать свет; момент испускания света мы можем заметить, поймав фотон (будет время, мы поговорим об этом). Но мы не можем предсказать, *когда* он собирается излучить, или если атомов несколько, то *какой* из них испустит свет. Может быть, по-вашему, все это из-за того, что в атомах есть какие-то внутренние «колесики», которых мы еще не разглядели? Нет, в атоме *нет* потайных колес; природа, насколько мы ее сегодня понимаем, ведет себя так, что *принципиально невозможно* делать точные предсказания о том, *что́ именно произойдет* в данном опыте. Ужасно, не правда ли? Ведь философы прежде всегда нас учили, что одно из основных свойств науки, неотделимых от нее,— это требование, чтобы в одинаковых условиях всегда происходили одни и те же события. Но это просто *неверно*, это *вовсе не* основное условие науки. На самом деле в равных обстоятельствах одинаковые события не происходят; предсказать их можно только в среднем, только статистически. И все-таки наука еще не совсем погибает.

Кстати, философы порой много говорят о вещах, *совершенно необходимых* науке; и это всегда, как можно в том убедиться, весьма наивно и, по всей видимости, ошибочно. К примеру, некоторые философы, и не только философы, утверждали, что для научных открытий существенно, чтобы один и тот же опыт, сделанный, скажем, в Стокгольме и в Кито, приводил к *одним* *и тем же* результатам. Но ведь это абсолютно неверно. Для *науки* это условие необязательно; оно может быть *установлено после опыта*, но нельзя этого требовать до опыта. Если, например, в Стокгольме проделан опыт по наблюдению северного сияния, то с какой стати он должен удасться в Кито? Вы там и сияния-то не увидите. «Но это ясно,— скажете вы.— Ничего иного и не могло быть, раз вы исследуете что-то внешнее, далекое от нас. А вот вы заберитесь в Стокгольме в ящик и закройте в нем шторки, получите ли вы тогда хоть какое-нибудь различие?» Бесспорно. Подвесьте в ящике маятник на шарнирном подвесе, его плоскость во время качаний начнет в Стокгольме медленно поворачиваться, а в Кито — нет, хотя шторки и там и там опущены. И этот факт вовсе не приведет к гибели науки. Ведь *в чем* ее основное предположение, ее фундаментальная философия? Мы уже сказали об этом в гл. 1: *единственное мерило справедливости любой идеи — это опыт.* Если выясняется, что большинство экспериментов в Кито приводят к тому же, что и в Стокгольме, то из этого «большинства экспериментов» можно вывести общий закон, а про те эксперименты, которые не приводят к одинаковым результатам, мы скажем, что на них повлиял характер местности близ Стокгольма. Мы можем разными способами подытоживать опыты, но пусть нас прежде времени не учат, что́ это за способы. Если нам говорят, что одни и те же опыты всегда должны приводить к одним и тем же результатам,— это прекрасно; но когда проверка покажет, что это *не так*, стало быть, это *не так*. Верьте только своим глазам, а прочие свои идеи формулируйте уже на основе опыта.

Вернемся опять к квантовой механике и к основам физики. Мы не будем пока входить в детали квантовомеханических принципов, их не так просто понять. Мы их просто примем, как они есть, а остановимся на кое-каких их следствиях. Вот одно из них: то, что мы обычно считаем волнами, может вести себя как частица; частицы же ведут себя как волны; то же относится и к любым телам. Между волной и частицей просто нет различия. Квантовая механика *объединяет* идею поля, волн поля и частиц в одно. При низких частотах волновые свойства проявляются более явственно и поэтому оказываются полезнее для приближенного описания в образах нашего повседневного опыта. Но по мере того, как частота возрастает, становится все очевиднее, что через приборы, измеряющие наше явление, проходит не волна, а частица. На самом деле, хоть мы и говорим о высоких частотах, волновые явления, если частота их превышает 10^{12} *гц*, заметить уже нельзя. Мы только *приходим к выводу* о наличии высокой частоты, зная энергию частиц и предполагая, что верна идея квантовой механики о частице-волне.

Возникает к тому же и новый взгляд на электромагнитное взаимодействие. В добавление к электрону, протону и нейтрону появляется новая *частица*, называемая *фотоном*. Само это новое воззрение на взаимодействие электронов и протонов, т. е. электромагнитную теорию, правильную в квантовомеханическом смысле, называют *квантовой электродинамикой*. Эту фундаментальную теорию взаимодействия света и вещества, или электрического поля и зарядов, следует считать крупнейшим достижением физики. В ней одной таятся главные правила всех обычных явлений, кроме тяготения и ядерных процессов. Например, из квантовой электродинамики выводятся все известные электрические, механические и химические законы: законы соударений бильярдных шаров, движения проводников в магнитном поле, удельной теплоемкости угарного газа, цвета неоновых букв, плотности соли и реакции образования воды из водорода и кислорода. Все это поддается расчету, если условия, в каких протекает явление, просты. Практически этого никогда не случается, но все же мы более или менее понимаем, что́ происходит. И до сего времени не было найдено ни одного исключения из законов квантовой электродинамики, только в атомных ядрах ее оказывается недостаточно; да и про них мы не можем сказать, что здесь наблюдаются какие-то исключения, просто мы не знаем, что́ там происходит.

Далее, квантовая электродинамика — в принципе это также теория всей химии и всех жизненных процессов, если предположить, что жизнь сводится в конечном счете к химии, а значит, и к физике (сама химия уже свелась к физике, и та часть физики, которая включает в себя химию, уже разработана). Мало того, та же квантовая электродинамика, эта величественная наука, предсказывает немало и новых явлений. Во-первых, она говорит о свойствах фотонов очень высоких энергий, гамма-излучения и т. д. Она предсказала еще одно очень оригинальное явление, а именно, что, кроме электрона, должна существовать другая частица с той же массой, но с противоположным зарядом, так называемый *позитрон*, и что электрон и позитрон, повстречавшись, могут друг друга истребить, излучив при этом свет или гамма-кванты (что, собственно, одно и то же; свет и γ-излучение — лишь разные точки на шкале частот).

По-видимому, справедливо и обобщение этого правила: существование античастицы для любой частицы. Античастица электрона носит имя позитрона; у других частиц названия присвоены по другому принципу: если частицу назвали *так-то*, то античастицу называют *анти-так-то*, скажем, антипротон, антинейтрон. В квантовую электродинамику вкладывают всего *два числа* (они называются массой электрона и зарядом электрона) и полагают, что все остальные числа в мире можно вывести из этих двух. На самом деле, однако, это не совсем верно, ибо существует еще целая совокупность химических чисел — весов атомных ядер. Ими нам и следует сейчас заняться.

§ 4. Ядра и частицы

Из чего состоят ядра? Чем части ядра удерживаются вместе? Обнаружено, что существуют силы огромной величины, которые и удерживают составные части ядра. Когда эти силы высвобождаются, то выделяемая энергия по сравнению с химической энергией огромна, это все равно, что сравнить взрыв атомной бомбы со взрывом тротила. Объясняется это тем, что атомный взрыв вызван изменениями внутри ядра, тогда как при взрыве тротила перестраиваются лишь электроны на внешней оболочке атома.

Так каковы же те силы, которыми нейтроны и протоны скреплены в ядре?

Электрическое взаимодействие связывают с частицей — фотоном. Аналогично этому Юкава предположил, что силы притяжения между протоном и нейтроном обладают полем особого рода, а колебания этого поля ведут себя как частицы. Значит, не исключено, что, помимо нейтронов и протонов, в мире существуют некоторые иные частицы. Юкава сумел вывести свойства этих частиц из уже известных характеристик ядерных сил. Например, он предсказал, что они должны иметь массу, в 200—300 раз большую, чем электрон. И — о, чудо! — в космических лучах как раз открыли частицу с такой массой! Впрочем, чуть погодя выяснилось, что это совсем не та частица. Назвали ее μ-мезон, или мюон.

И все же несколько попозже, в 1947 или 1948 г., обнаружилась частица — π-мезон, или пион,— удовлетворявшая требованиям Юкавы. Выходит, чтобы получить ядерные силы, к протону и нейтрону надо добавить пион. «Прекрасно! — воскликнете вы.— С помощью этой теории мы теперь соорудим квантовую ядродинамику, и пионы послужат тем целям, ради которых их ввел Юкава; посмотрим, заработает ли эта теория, и если да, то объясним все». Напрасные надежды! Выяснилось, что расчеты в этой теории столь сложны, что никому еще не удалось их проделать и извлечь из теории какие-либо следствия, никому не выпала удача сравнить ее с экспериментом. И тянется это уже почти 20 лет!

С теорией что-то не клеится; мы не знаем, верна она или нет; впрочем, мы уже знаем, что в ней чего-то не достает, что *какие-то* неправильности в ней таятся. Покуда мы топтались вокруг теории, пробуя вычислить следствия, экспериментаторы за это время кое-что открыли. Ну, тот же μ-мезон, или мюон. А мы до сей поры не знаем, на что он годится. Опять же, в космических лучах отыскали множество «лишних» частиц. К сегодняшнему дню их уже свыше 30, а связь между ними все еще трудно ухватить, и непонятно, чего природа от них хочет и кто из них от кого зависит. Перед нами все эти частицы пока не предстают как разные проявления одной и той же сущности, и тот факт, что имеется куча разрозненных частиц, есть лишь отражение наличия бессвязной информации без сносной теории. После неоспоримых успехов квантовой электродинамики — какой-то набор сведений из ядерной физики, обрывки знаний, полуопытных-полутеоретических. Задаются, скажем, характером взаимодействия протона с нейтроном и смотрят, что́ из этого выйдет, не понимая на самом деле, откуда эти силы берутся. Сверх описанного никаких особых успехов не произошло.

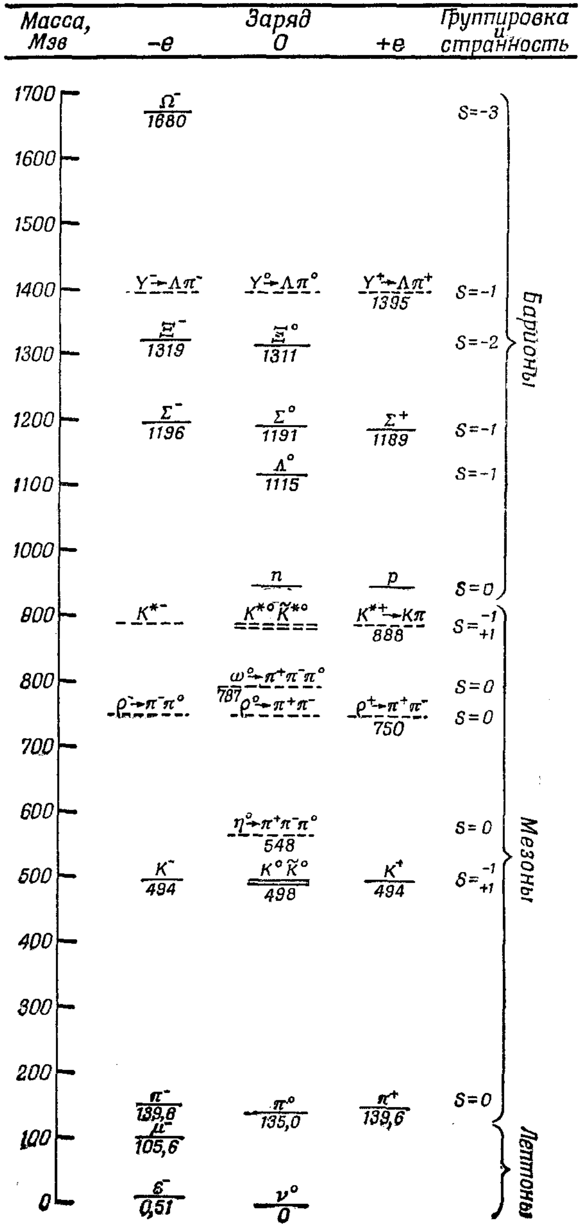
Но химических элементов ведь тоже было множество, и внезапно между ними удалось увидеть связь, выраженную периодической таблицей Менделеева. Скажем, калий и натрий — вещества, близкие по химическим свойствам,— в таблице попали в один столбец. Так вот, попробовали соорудить таблицу типа таблицы Менделеева и для новых частиц. Одна подобная таблица была предложена независимо Гелл-Манном в США и Нишиджимой в Японии. Основа их классификации — новое число, наподобие электрического заряда. Оно присваивается каждой частице и называется ее «странностью» S. Число это не меняется (так же как электрический заряд) в реакциях, производимых ядерными силами.

В табл. 2.2 приведены новые частицы. Мы не будем пока подробно говорить о них. Но из таблицы по крайней мере видно, как мало мы еще знаем. Под символом каждой частицы стоит ее масса, выраженная в определенных единицах, называемых мегаэлектронвольт, или *Мэв* (1 *Мэв* — это $1{,}782 \cdot 10^{-27}$ *г*). Не будем входить в исторические причины, заставившие ввести эту единицу. Частицы помассивнее стоят в таблице повыше. У (p — 938,3; n — 939,6). В одной колонке стоят частицы одинакового электрического заряда, нейтральные — посерединке, положительные — направо, отрицательные — налево.

Частицы подчеркнуты сплошной линией, «резонансы» — штрихами. Некоторых частиц в таблице нет совсем: нет фотона и гравитона, очень важных частиц с нулевыми массой и зарядом (они не попадают в барион-мезон-лептонную схему классификации), нет и кое-каких новейших резонансов (φ, f, $Y^{*\prime}$ и др.). Античастицы мезонов в таблице приводятся, а для античастиц лептонов и барионов надо было бы составить новую таблицу, сходную с этой, но только зеркально отраженную относительно нулевой колонки. Хотя все частицы, кроме электрона, нейтрино, фотона, гравитона и протона, неустойчивы, продукты их распада написаны только для резонансов. Странность лептонов тоже не написана, так как это понятие к ним неприменимо — они не взаимодействуют сильно с ядрами.

Частицы, стоящие вместе с нейтроном и протоном, называют *барионами*. Это «лямбда» с массой 1115,4 *Мэв* и три дру-

Таблица 2.2 ● ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ЧАСТИЦЫ



гие — «сигмы», называемые сигма-минус, сигма-нуль, сигма-плюс, с почти одинаковыми массами. Группы частиц почти одинаковой массы (отличие на 1—2%) называются *мультиплетами*. У всех частиц в мультиплете странность одинакова. Первый мультиплет — это пара (*дублет*) протон — нейтрон, потом идет *синглет* (одиночка) лямбда, потом — *триплет* (тройка) сигм, дублет кси и синглет омега-минус. Начиная с 1961 г., начали открывать новые тяжелые частицы. Но *частицы ли* они? Живут они так мало (распадаются, едва возникнув, на Λ и π), что неизвестно, назвать ли их новыми частицами или считать «резонансным» взаимодействием между Λ и π при некоторой фиксированной энергии.

Для ядерных взаимодействий, кроме барионов, необходимы другие частицы — *мезоны*. Это, во-первых, три разновидности пионов (плюс, нуль и минус), образующие новый триплет. Найдены и новые частицы — K-мезоны (это дублет K^+ и K^0). У каждой частицы бывает античастица, если только частица не оказывается *своей собственной* античастицей, скажем π^+ и π^- — античастицы друг друга, а π^0 — сам себе античастица. Античастицы и K^- с K^+ и K^0 с $\overline{K^0}$. Кроме того, после 1961 г. мы начали открывать новые мезоны, или *вроде*-мезоны, распадающиеся почти мгновенно. Одна такая диковинка называется омега, ω, ее масса 783, она превращается в три пиона; есть и другое образование, из которого получается пара пионов.

Подобно тому как из очень удачной таблицы Менделеева выпали некоторые редкие земли, точно так же из нашей таблицы выпадают некоторые частицы. Это те частицы, которые с ядрами сильно не взаимодействуют, к ядерному взаимодействию отношения не имеют и между собой сильно тоже не взаимодействуют (под сильным понимается мощный тип взаимодействия, дающего атомную энергию). Называются эти частицы *лептоны*; к ним относятся электрон (очень легкая частица с массой 0,51 *Мэв*) и мюон (с массой в 206 раз больше массы электрона). Насколько мы можем судить по всем экспериментам, электрон и мюон различаются *только* массой. Все свойства мюона, все его взаимодействия ничем не отличаются от свойств электрона — только один тяжелее другого. Почему он тяжелее, какая ему от этого польза, мы не знаем. Кроме них, есть еще нейтральный лептон — *нейтрино*, с массой нуль. Более того, сейчас известно, что есть *два* сорта нейтрино: одни, связанные с электронами, а другие — с мюонами.

И наконец, существуют еще две частицы, тоже с ядрами не взаимодействующие. Одну мы знаем уже — это фотон; а если поле тяготения также обладает квантовомеханическими свойствами (хотя пока квантовая теория тяготения не разработана), то, возможно, существует и частица гравитон с массой нуль.

Что такое «масса нуль»? Массы, которые мы приводили, это массы *покоящихся* частиц. Если у частицы масса нуль, то это значит, что она не смеет *покоиться*. Фотон никогда не стоит на месте, скорость его равна всегда 300 000 *км/сек*. Мы с вами еще разберемся в теории относительности и попытаемся глубже вникнуть в смысл понятия массы.

Итак, мы встретились с целым строем частиц, которые все вместе, по-видимому, являются очень фундаментальной частью вещества. К счастью, эти частицы *не все* отличаются по своему взаимодействию друг от друга. Видимо, есть только *четыре типа* взаимодействий между ними. Перечислим их в порядке убывающей силы: ядерные силы, электрические взаимодействия, β-распадное взаимодействие и тяготение. Фотон взаимодействует со всеми заряженными частицами с силой, характеризуемой некоторым постоянным числом 1/137. Детальный закон этой связи известен — это квантовая электродинамика. Тяготение взаимодействует со всякой *энергией*, но чрезвычайно слабо, куда слабее, чем электричество. И этот закон известен. Потом идут так называемые слабые распады: β-распад, из-за которого нейтрон распадается довольно медленно на протон, электрон и нейтрино. Тут закон выяснен лишь частично. А так называемое сильное взаимодействие (связь мезона с барионом) обладает по этой шкале силой, равной единице, а закон его совершенно темен, хоть и известны кое-какие правила, вроде того, что количество барионов ни в одной реакции не меняется.

Таблица 2.3 • ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

Взаимодействие	Сила*	Закон
Фотон с заряженными частицами	$\sim 10^{-2}$	Известен
Тяготение с энергией	$\sim 10^{-40}$	»
Слабые распады	$\sim 10^{-5}$	Частично известен
Мезоны с барионами	~ 1	Не известен (кроме некоторых правил)

* «Сила» — безразмерная мера константы связи, проявляющаяся в каждом взаимодействии (знак ∼ означает «примерно»).

Положение, в котором находится современная физика, следует считать ужасным. Я бы подытожил его такими словами: вне ядра мы, видимо, знаем все; внутри него справедлива квантовая механика, нарушений ее принципов там не найдено.

Сцена, на которой действуют все наши знания,— это релятивистское пространство-время; не исключено, что с ним связано и тяготение. Мы не знаем, как началась Вселенная, и мы ни разу не ставили опытов с целью точной проверки наших представлений о пространстве-времени на малых расстояниях, мы только *знаем*, что вне этих расстояний наши воззрения безошибочны. Можно было бы еще добавить, что правила игры — это принципы квантовой механики; и к новым частицам они, насколько нам известно, приложимы не хуже, чем к старым. Поиски происхождения ядерных сил приводят нас к новым частицам; но все эти открытия вызывают только замешательство. У нас нет полного понимания их взаимных отношений, хотя в некоторых поразительных связях между ними мы уже убедились. Мы, видимо, постепенно приближаемся к пониманию мира заатомных частиц, но неизвестно, насколько далеко мы ушли по этому пути.

Глава 3

ФИЗИКА И ДРУГИЕ НАУКИ

§ 1. *Введение*

Физика — это самая фундаментальная из всех наук, самая всеобъемлющая; огромным было ее влияние на все развитие науки. Действительно, ведь нынешняя физика вполне равноценна давнишней *натуральной философии*, из которой возникло большинство современных наук. Не зря физику вынуждены изучать студенты всевозможных специальностей; во множестве явлений она играет основную роль.

В этой главе мы попытаемся рассказать, какого рода фундаментальные проблемы встают перед соседними науками. Жаль, что нам не придется по-настоящему заняться этими науками, их проблемами; мы не сможем прочувствовать всю их сложность, тонкость и красоту. Из-за нехватки места мы не коснемся также связи физики с техникой, с промышленностью, с общественной жизнью и военным искусством. Даже на замечательной связи, объединяющей физику с математикой, мы не задержимся. (Математика, с нашей точки зрения, не наука в том смысле, что она не относится к *естественным* наукам. Ведь мерило ее справедливости отнюдь не опыт.) Кстати, не все то, что не наука, уж обязательно плохо. Любовь, например, тоже не наука. Словом, когда какую-то вещь называют не наукой, это не значит, что с нею что-то неладно: просто не наука она, и всё.

§ 2. *Химия*

Химия испытывает на себе влияние физики, пожалуй, сильней, чем любая другая наука. Когда-то, в свои младенческие годы, когда химия почти целиком сводилась к тому, что мы сейчас называем неорганической химией (т. е. химии веществ, не связанных с живыми телами), когда кропотливым трудом химиков открывались многие химические элементы, их связь друг с другом, изучались их соединения, анализировался состав почвы и минералов, в те годы химия сыграла важную роль в становлении физики. Эти науки взаимодействовали очень сильно: вся теория атомного строения вещества получила основательную поддержку в химическом эксперименте. Химическую теорию, т. е. теорию самих реакций, подытожила периодическая система Менделеева. Она выявила немало удивительных связей между разными элементами — стало ясно, что́ с чем и как соединяется; все эти правила составили неорганическую химию. Сами они в свою очередь были в конечном счете объяснены квантовой механикой. Стало быть, на самом деле теоретическая химия — это физика. Однако объяснение, даваемое квантовой механикой, — это все-таки объяснение *в принципе*. Мы уже говорили, что знание шахматных правил — это одно, а умение играть — совсем другое. Можно знать правила, а играть неважно. Точно так же очень и очень непросто точно предсказать, что произойдет в такой-то химической реакции. И все же в самых глубинах теоретической химии лежит квантовая механика.

Есть к тому же ветвь физики и химии, и очень важная ветвь, к которой они обе приложили руки. Речь идет о применении статистики к тем случаям, когда действуют законы механики, т. е. о *статистической механике*. В любой химической реакции действует много атомов, а движения их случайны и замысловаты. Если бы мы могли проанализировать каждое столкновение, подробно проследить движение каждой молекулы, то мы бы всегда знали, что случится. Но нужно так много чисел, чтобы отметить путь всех молекул, что никакой емкости вычислительной машины и уж во всяком случае емкости мозга не хватит. Значит, важно научиться работать с такими сложными системами. Статистическая механика, кроме того, лежит в основе теории тепловых явлений, или термодинамики.

В наше время неорганическая химия как наука свелась в основном к физической и квантовой химии; первая изучает скорости реакций и прочие их детали (как попадает молекула в молекулу, какая из частей молекулы оторвется первой и т. д.), а вторая помогает понимать происходящее на языке физических законов.

Другая ветвь химии — *органическая химия*, химия веществ, связанных с жизненными процессами. Одно время думали, что подобные вещества столь необыкновенны, что их не изготовишь своими руками из неорганических веществ. Но это оказалось не так: органические вещества отличаются от неорганических только большей сложностью расположения атомов. Органическая химия, естественно, тесно связана с биологией, снабжающей ее веществами, и с промышленностью; далее, многое из физической химии и квантовой механики столь же приложимо к органическим соединениям, как и к неорганическим. Впрочем, главные задачи органической химии вовсе не в этом, а в анализе и синтезе веществ, образуемых в биологических системах, в живых телах. Отсюда можно постепенно перейти к биохимии и к самой биологии, т. е. к молекулярной биологии.

§ 3. *Биология*

Итак, мы пришли к науке, которая занята изучением живого,— к *биологии*. Когда она делала свои первые шаги, биологи решали чисто описательные задачи; им нужно было выяснить, *каким* бывает живое, им приходилось, скажем, подсчитывать, сколько у блохи на ноге волосков, и т. д. Когда все это (с большим интересом) было изучено, они обратились к *механизму* функционирования живого, сперва, естественно, очень грубо, в общих чертах, потому что в разных тонкостях разобраться было непросто.

Когда-то между биологией и физикой существовали интересные отношения: именно биология помогла физике открыть *закон сохранения энергии*; ведь Майер установил этот закон при изучении количества тепла, выделяемого и поглощаемого живым организмом.

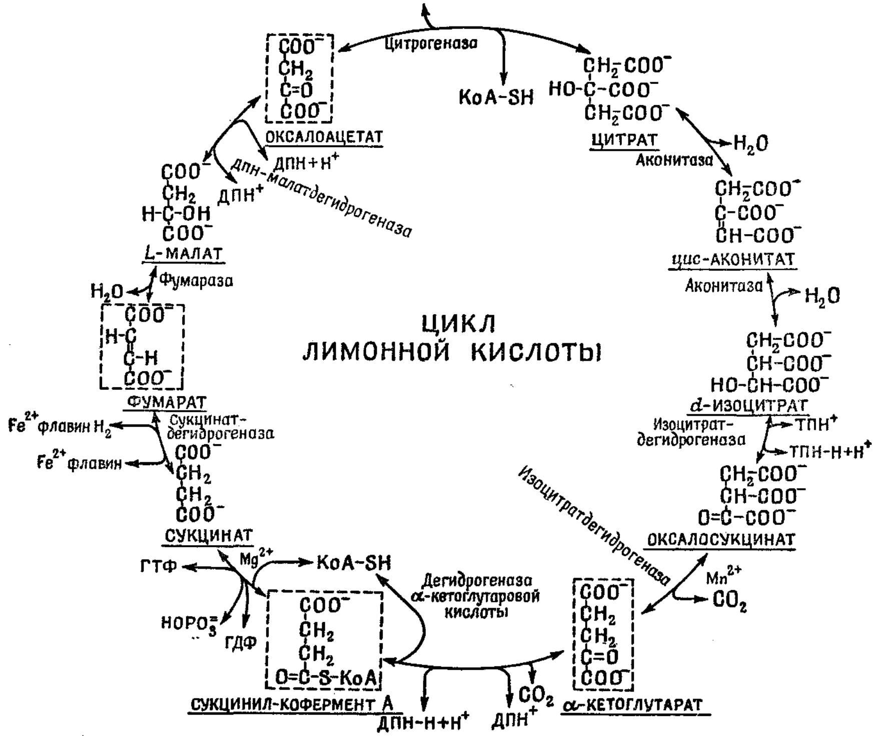
Если вглядеться в биологию живых организмов, можно заметить множество чисто физических явлений: циркуляцию крови, давление и т. п. Взять, к примеру, нервы. Наступив на острый камешек, мы мгновенно узнаем об этом: что-то нам о том говорит, какая-то информация поднимается вверх по ноге. Как же это происходит? Изучая нервы, биологи пришли к выводу, что это очень нежные трубочки со сложными, очень тонкими стенками. Через эти стенки в клетку поступают ионы; получается нечто вроде конденсатора с положительными ионами снаружи и отрицательными внутри. У такой мембраны есть замечательное свойство: если в одном месте она «разряжается», т. е. если в каком-то месте ионы пройдут насквозь, так что электрическое напряжение здесь упадет, то соседние ионы почувствуют это электрическое влияние; это так подействует на мембрану в соседнем месте, что она тоже пропустит сквозь себя ионы. В свою очередь это скажется на следующем месте и т. д. Возникнет волна «проницаемости» мембраны; она побежит вдоль нервного волокна, если один конец его «возбудится» острым камнем. Выходит словно длинная цепочка костяшек домино, поставленных торчком; толкнешь крайнюю, она — следующую и т. д. Конечно, больше одного сообщения так не передашь, надо снова поднять все костяшки; и в нервной клетке тоже после этого идут процессы медленного накопления ионов и подготовки нерва к новому импульсу. Так мы узнаём, что́ мы делаем (или по крайней мере где мы находимся). Электрические явления при прохождении нервного импульса, конечно, можно регистрировать электрическими приборами. Поскольку эти явления *существуют*, то без физики электричества нельзя понять проводимость по нерву.

Обратное явление происходит, когда откуда-то из мозга по нерву передается сообщение. Что делается тогда на конце нерва? Нерв там дает разветвления, которые связаны с мышечной структурой; называют их *концевые ответвления*. По причинам, точно не известным, в момент, когда импульс достигает конца нерва, из него вылетают маленькие пакетики реактивов, называемых *ацетилхолин* (5—10 молекул за раз); они влияют на мышечное волокно, и оно сокращается — видите, как все просто! Но что же все-таки вынуждает мышцу сокращаться? Мышца — это большое число плотно расположенных волокон; в них содержатся два разных вещества — миозин и актомиозин; и все же механизм, при помощи которого химическая реакция, вызванная ацетилхолином, меняет размер молекулы, пока еще не выяснен. Иначе говоря, неизвестны самые основные процессы, ответственные за механические движения мышц.

Биология — настолько широкое поле деятельности, что есть уйма проблем, о которых мы даже не упоминаем; скажем, вопрос о том, как осуществляется зрение (что свет делает внутри глаза) или как работает ухо и т. д. (Как работает *мысль*, мы обсудим позже, когда будем говорить о психологии.)

Так вот, все эти вопросы, стоящие перед биологией, на самом деле для биолога отнюдь не главные, отнюдь не они лежат в основе жизни. Если мы их и поймем, нам все равно не понять сущности жизни. Вот вам пример: люди, изучающие нервы, понимают, что их работа очень нужна, ведь животных без нервов не бывает. Но *жизнь* без нервов *возможна*. У растений нет ни нервов, ни мышц, и все же они работают, живут (что одно и то же). Значит, самые фундаментальные проблемы биологии нужно искать глубже.

При этом мы установим, что у всех живых существ есть много общих черт. Самое же общее между ними то, что они состоят из *клеток*, внутри каждой из которых действует сложный механизм химических превращений. В растительных клетках, например, есть механизм поглощения света и выработки сахарозы, которая потом в темноте поглощается, поддерживая жизнь растения. Когда животное поедает растение, сахароза порождает в животном цепь химических реакций, тесно связанных с фотосинтезом растений (и обратной цепочкой в темноте).



Фиг. 3.1. Цикл Кребса.

В клетках живых организмов происходит множество хитро задуманных химических реакций: одно соединение превращается в другое, затем в третье, затем еще и еще. Фиг. 3.1 дает некое представление о гигантских усилиях, предпринятых в изучении биохимии; там сведены воедино наши знания о малой доле того множества цепочек реакций (может быть, примерно 1% общего количества), которые происходят в клетке.

Вы видите здесь ряд молекул, последовательно превращающихся одна в другую,— цикл с довольно мелкими шагами. Это — цикл Кребса, или дыхательный цикл. Судя по изменениям в молекулах, каждое вещество и каждый шаг в цикле довольно просты. Но *эти изменения относительно трудно воспроизводятся лабораторным путем.* Это открытие необыкновенной важности в биохимии. Дело вот в чем. Если есть два сходных вещества, то как раз их-то часто нельзя превратить друг в друга, потому что эти две формы обычно отделены энергетическим барьером, «перевалом». Ведь, желая перенести предмет на новое место на том же уровне по другую сторону перевала, вы сперва должны поднять его над перевалом. Это требует добавочной затраты энергии. По той же причине многие реакции не происходят, им не хватает так называемой *энергии активации*. Если вы хотите присоединить к химическому соединению лишний атом, то для того, чтобы он пристал куда надо, его следует придвинуть *вплотную*, иначе нужная перестановка не произойдет, он лишь немного взбежит по «склону» и скатится обратно. Но если б вы могли, буквально повертев молекулу в руках, раздвинуть ее атомы, ввести в образовавшуюся дыру ваш атом и затем закрыть отверстие, то вы бы *миновали* подъем, никакой затраты энергии не понадобилось бы и реакция прошла бы легче. Так вот, в клетках и впрямь существуют *очень* большие молекулы (куда больше, чем те, чьи изменения изображены на фиг. 3.1), которые как-то умеют расставить малые молекулы так, чтобы реакция протекала без труда. Они, эти большие сложные устройства, называются *ферменты* (или закваска; назвали их так потому, что обнаружили их при сбраживании сахара. Кстати, первые из реакций цикла Кребса были открыты именно при сбраживании). Реакции цикла идут только в присутствии ферментов.

Сам фермент состоит из другого вещества — *белка*. Молекулы ферментов велики и сложны. Все ферменты отличаются друг от друга, причем каждый предназначен для контроля некоторой определенной реакции. На фиг. 3.1 возле каждой реакции обозначены названия нужного фермента (а иногда один фермент контролирует и две реакции). Подчеркнем, что сам фермент в реакцию не вовлекается. Он не изменяется, его дело только передвинуть атом с одного места в другое. Передвинет в одной молекуле и готов уже заняться следующей. Совсем как станок на фабрике, причем должен иметься запас нужных атомов и возможность избавляться от ненужных. Возьмите, например, водород: существуют ферменты, имеющие специальные ячейки для переноса водорода в любой химической реакции. Скажем, имеются три или четыре фермента, которые понижают количество водорода; они используются во многих местах цикла. Интересно, что механизм, высвобождающий водород в одном месте, придерживает этот атом, чтобы использовать его еще где-нибудь.

Важнейшая деталь цикла, приведенного на фиг. 3.1, это превращение ГДФ в ГТФ (гуаназиндифосфат в гуаназинтрифосфат), потому что во втором веществе — ГТФ — энергии намного больше, чем в первом. Подобно тому как в некоторых ферментах имеется «ящик» для переноса атомов водорода, бывают еще особые «ящики» для переноса *энергии*; в них входит трифосфатная группа. В ГТФ больше энергии, чем в ГДФ, и когда цикл идет в одну сторону, создаются молекулы с избытком энергии; они могут привести в действие другие циклы, которым *требуется* энергия, например цикл *сжатия* мышцы. Мышца не сократится, если нет ГТФ. Можно поместить в воду мышечное волокно и добавить туда ГТФ, тогда волокно сократится, превращая ГТФ в ГДФ (если только присутствуют нужные ферменты). Таким образом, сокращение мышцы есть превращение ГДФ в ГТФ; накопленный в течение дня ГТФ используется в темноте для того, чтобы пустить весь цикл в обратную сторону. Как видите, ферменту все равно, в какую сторону идет реакция; если б это было не так, нарушался бы один из законов физики.

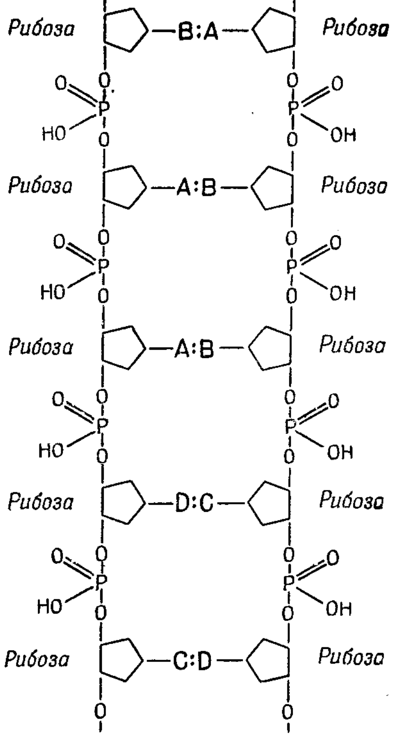
Есть и другой резон, по которому для биологии и других наук важна именно физика,— это *техника эксперимента*. Например, нарисованная биохимическая схема не была бы еще до сего времени известна, если бы за нею не стояли большие достижения экспериментальной физики. Дело в том, что для анализа этих невообразимо сложных систем нет лучшего средства, нежели ставить *метки* на атомах, участвующих в реакции. Если ввести в цикл немного углекислоты с «зеленой меткой» на ней и посмотреть, где метка окажется через 3 *сек*, потом через 10 *сек* и т. д., то можно проследить течение всей реакции. Но как сделать «зеленую метку»? При помощи различных *изотопов*. Напомним, что химические свойства атомов определяются числом *электронов*, а не массой ядра. Но в атоме углерода, к примеру, может быть либо шесть, либо семь нейтронов наряду с обязательными для углерода шестью протонами. В химическом отношении атомы C^{12} и C^{13} не отличаются, но по массе и ядерным свойствам они различны, а значит, и различимы. Используя эти изотопы, можно проследить ход реакции. Еще лучше для этого радиоактивный изотоп C^{14}; с его помощью можно весьма точно проследить за малыми порциями вещества.

Вернемся, однако, к описанию ферментов и белков. Не все белки — ферменты, но все ферменты — белки. Существует множество белков, таких, как белки мышц, структурные белки, скажем, в хрящах, волосах, коже, не являющихся ферментами. И все-таки белки — очень характерная для жизни субстанция; во-первых, это составная часть всех ферментов, а во-вторых, составная часть многих иных живых веществ. Структура белков проста и довольно занятна. Они представляют собой ряды, или цепи, различных *аминокислот*. Существует два десятка разных аминокислот, и все они могут сочетаться друг с другом, образуя цепи, костяком которых являются группы CO—NH и т. п. Белок — это всего лишь цепочки, сложенные из этих 20 аминокислот. Каждая аминокислота, по всей вероятности, служит для каких-то специальных целей. В некоторых аминокислотах в определенном месте находится атом серы; два атома серы в одном и том же белке образуют связь, т. е. схватывают цепь в двух точках и составляют петлю. В других есть избыточный атом кислорода, придающий им кислотные свойства; характеристики третьих — щелочные. В некоторых бывают большие группы атомов, свисающие с одной стороны и занимающие много места. Одна из аминокислот — пролин — в действительности не амино-, а иминокислота. Эта небольшая разница приводит к тому, что когда в цепи есть пролин, то цепь перекручивается. Если бы вы захотели создать какой-то определенный белок, то вам пришлось бы дать такие указания: здесь поместите серный крюк, затем добавьте чего-нибудь, чтобы заполнить место, теперь привяжите что-нибудь, чтобы цепь перекрутилась, и т. д. Получились бы скрепленные между собой замысловатые цепочки со сложной структурой; все ферменты, по-видимому, устроены именно так. Одним из триумфов современной науки было открытие (в 1960 г.) точного пространственного расположения атомов некоторых белков; в них 56—60 аминокислот подключены друг за другом. Было установлено точное местоположение свыше 1000 атомов (даже до 2000, если считать и водород), входящих в сложную структуру двух белков (один из них — гемоглобин). А одна из печальных сторон этого открытия проявилась в том, что из этой картины ничего увидеть нельзя; мы не понимаем, почему она такая. Именно эту проблему и следует сейчас атаковать.

Есть и другая проблема в биологии: откуда ферменты «знают», кем им стать? От красноглазой мухи рождается опять красноглазая мушка; значит, вся информация о ферментах, создающих красный пигмент, должна перейти к очередной мушке. Передает эту информацию не белок, а вещество в ядре клетки, ДНК (дезоксирибонуклеиновая кислота). Это — та ключевая субстанция, которая передается от одной клетки к другой (половые клетки, например, почти целиком состоят из ДНК) и уносит с собой инструкцию, как делать ферменты. ДНК — это «калька», печатная матрица. На что похожа эта калька, как она должна действовать? Первое — она должна воспроизводить самое себя; второе — она должна быть способна давать задания белку. Что до первого, то можно было бы думать, что это происходит так же, как воспроизведение клеток: клетки подрастают и делятся пополам. Может быть, молекулы ДНК тоже растут и тоже делятся? Нет, это исключено. Ведь *атомы* наверняка не растут и не делятся! Видимо, для репродукции молекул нужен другой путь, похитрее.

Структура ДНК долго изучалась сперва химически (составные части), затем рентгенографически (пространственная структура). В результате пришли к следующему знаменательному открытию: молекула ДНК — это пара цепочек, навитых друг на друга. Скелет каждой цепочки, хотя и похожий на белковые цепи, но химически отличный от них,— это ряд сахарных

Фиг. 3.2. Схема ДНК.



и фосфатных групп, как показано на фиг. 3.2. Из этой схемы видно, как в цепи может храниться инструкция, ибо, разняв цепочку на две нитки, вы получаете ряд веществ $BAADC\ldots$; не исключено, что этот ряд у каждого организма свой. Значит, можно думать, что каждый особый *ряд* ДНК содержит в себе особые *указания*, как производить белки.

На схеме видны пары поперечных звеньев, присоединенных к сахарным группам и стягивающих между собой две нити. Эти звенья неодинаковы; есть четыре сорта звеньев — аденин, тимин, цитозин, гуанин, обозначаемые A, B, C и D. Интересно, что не всякие звенья спариваются. Например, возможны пары AB или CD; они размещены на двух нитях так, что «подходят друг к другу», обладают сильной энергией взаимодействия. Но C к A или B к C не подходит; если в цепи стоит C, то в другой цепи в этом месте должно быть только D. Каждой букве в одной цепи соответствует определенная буква в другой.

Как же мыслится при этом воспроизведение? Пусть цепь расщеплена на две. Как сделать другую такую же? Если в веществе клетки есть фабрика, вырабатывающая фосфат, сахар и звенья A, B, C, D (пока не привязанные к цепи), то к нашей половинке цепочки присоединятся только подходящие звенья, дополняющие $BAADC$, т. е. $ABBCD\ldots$. При делении клетки цепь разнимается посредине на две нитки, каждая переходит в свою клетку и там набирает себе дополнение.

Наконец, последний вопрос: как порядок следования A, B, C, D в ДНК определяет расстановку аминокислот в белках? Ответа пока нет. Это основная нерешенная проблема современной биологии. Пока мы располагаем только какими-то обрывками информации об этом. В клетке имеются мельчайшие частички — микросомы; сейчас известно, что в них и вырабатываются белки. Но микросомы находятся не в ядре, не там, где находится ДНК со своими инструкциями. По-видимому, в этом есть какой-то смысл. Известно, однако, что от ДНК отрываются кусочки молекул, не такие длинные, как ДНК, несущая в себе всю информацию, а нечто вроде некрупных ее долек. Называют их РНК, но не в этом дело. Это нечто вроде уменьшенной копии ДНК. Известно, что РНК как-то переносит в микросому сообщение о том, какой сорт белка нужно изготовить. (Этот факт уже известен.) После этого в микросоме образуется белок. Это тоже известно. Но различные детали того, как аминокислоты входят в белки и как они располагаются в согласии с кодом, зашифрованным в РНК, пока не известны. Мы не умеем читать этот код. Если «написано», например, *ABCCA*, то мы не знаем, какой белок будет приготовлен.

Право же, ни одна наука, ни одна отрасль знаний не движутся так бурно по всем направлениям вперед, как биология. Но если б мы должны были назвать то самое главное, что ведет нас сейчас все вперед и вперед в наших попытках понять явление жизни, мы обязаны были бы сказать: «*все тела состоят из атомов*», всё, что происходит в живых существах, может быть понято на языке движений и покачиваний атомов.

§ 4. *Астрономия*

В нашем стремительном обзоре всей Вселенной очередь дошла до астрономии. Астрономия — старше физики. Фактически физика и возникла из нее, когда астрономия заметила поразительную простоту движения звезд и планет; объяснение этой простоты и стало *началом* физики. Но самым выдающимся открытием астрономии было открытие того, что *звезды состоят из таких же атомов, что и Земля**. Как это было доказано?

* Как лихо я управился с этим! Как много скрыто за каждой фразой этого короткого рассказа. «Звезды и Земля сделаны из одинаковых атомов». Обычно мне одной такой темы хватает на целую лекцию. Поэты утверждают, что наука лишает звезды красоты, для нее, мол, звезды — просто газовые шары. Ничего не «просто». Я тоже любуюсь звездами и чувствую их красоту. Но кто из нас видит больше? Обширность небес превосходит мое воображение... Затерянный в этой карусели, мой маленький глаз способен видеть свет, которому миллион лет. Безбрежное зрелище Вселенной... и я сам — ее часть... Быть может, вещество моего тела извергнуто какой-нибудь забытой звездой, такой же, как вон та, чей взрыв я вижу сейчас. Или я смотрю на звезды гигантским оком Паломарского телескопа, вижу, как они устремляются во все стороны от той первоначальной точки, где, быть может, они некогда обитали бок о бок. Что это за картина и каков ее смысл? И *зачем все это*? Таинству Вселенной не причинит ущерба наше проникновение в какие-то ее секреты, ибо правда более поразительна, нежели то, что было нарисовано воображением художников прошлого! Почему же нынешние поэты не говорят об этом? Что за народ эти лирики, если они способны говорить о Юпитере только как о человеке, и молчат, если это огромный вращающийся шар из метана и аммиака?

Каждый атом испускает свет определенных частот, подобно тому как у каждого музыкального инструмента есть свое звучание — определенный набор частот, или высот, звука. Слыша одновременно несколько тонов, мы можем разделить их; но способности нашего глаза в этом отношении далеко не столь велики, он не может разделить смесь цветов на составляющие части. Однако с помощью спектроскопа *становится возможным* анализ частот световых волн, он позволяет видеть истинные тона атомов различных звезд. Ведь два химических элемента были даже обнаружены на звездах прежде, чем на Земле: гелий (он был открыт на Солнце, потому он так и назван) и технеций (его обнаружили на некоторых холодных звездах). Но раз звезды состоят из тех же атомов, что и Земля, то это сильно продвигает нас вперед в понимании сущности звезд. Нам хорошо известно поведение атомов при высоких температурах и невысоких плотностях, и это позволяет при помощи статистической механики анализировать поведение звездного вещества. Даже не умея воспроизводить звездное состояние на Земле, но опираясь на основные физические законы, мы часто указываем совершенно точно (а иногда почти точно), что́ происходит на звездах. Так физика помогает астрономии. Это может показаться странным, но распределение вещества внутри Солнца мы знаем куда лучше, чем его распределение внутри Земли. Казалось бы, что́ можно узнать, взглянув сквозь телескоп на пятнышко света? Однако *недра* звезд известны нам гораздо лучше, чем этого можно было бы ожидать, ибо мы умеем *рассчитывать*, что́ произойдет с атомами звезд при многих обстоятельствах.

Одно из наиболее впечатляющих открытий астрономии — это открытие источника энергии звезд, поддерживающего их горение. Один из тех, кто открыл это, отправился на прогулку с девушкой как раз в ночь после того, как понял, что на звездах происходит *ядерная реакция*, что в этом причина их свечения. Она сказала: «Взгляни, как чудесно сияют звезды!» А он ответил: «Да. Чудесно. А ведь сегодня я — единственный человек в мире, который знает, *почему* они сияют!» Она только рассмеялась. На нее не произвело впечатления, что он — единственный человек, понимающий, почему звезды светят. Что ж, как это ни печально, быть одиноким и непонятым — это в порядке вещей.

Так вот, Солнце получает энергию от ядерного «сгорания» водорода, который переходит при этом в гелий. Из водорода в глубинах звезд вырабатываются далее другие химические элементы. Вещество, из которого сделаны *мы*, было когда-то «испечено» в звезде и выплеснуто наружу. Но откуда это известно? А вот откуда. Содержание различных изотопов в веществе C^{12}, C^{13} и т. д. — никогда не меняется при *химических* превращениях, ибо для обоих изотопов С химические реакции одинаковы. Эти пропорции есть результат лишь *ядерных* реакций. Изучая пропорцию изотопов в остывшей, мертвой золе, каковой являемся мы, можно догадаться, на что была похожа *печь*, в которой сформировалось наше вещество. Она была похожа на звезды, и поэтому очень вероятно, что элементы «сделаны» в звездах и выброшены оттуда при взрывах, называемых нами Новыми и Сверхновыми звездами. Астрономия столь близка к физике, что еще не один раз в этом курсе мы обратимся к ней.

§ 5. *Геология*

Перейдем теперь к так называемым *наукам о Земле*, или *геологии*. К ним относятся прежде всего метеорология, или наука о погоде. Метеорологическая аппаратура — это физические приборы, так что метеорология снабжена приборами благодаря развитию экспериментальной физики (мы уже об этом говорили). Иное дело теория метеорологии, она никогда не была удовлетворительно разработана никем из физиков. «Странно,— скажете вы,— ведь это всего лишь воздух, разве мы не знаем уравнений движения воздуха?» Да, знаем. «Почему же, зная, в каком состоянии воздух сегодня, мы не можем предсказать его состояние на завтра?» Во-первых, мы не знаем, каково *на самом деле* сегодня состояние воздуха, ибо он то и дело где-то завихряется и струится. Воздух очень чувствителен к любым изменениям и попросту неустойчив. Чтобы понять, о какой неустойчивости я говорю, взгляните, как вода спокойно течет над плотиной и вдруг, падая, превращается во множество пузырьков и капель. Вы знаете состояние воды в момент, когда она переваливает через плотину,— она совершенно спокойна; откуда же берутся капли в момент падения? От чего зависит, на какие струи разобьется поток, где они возникнут, куда упадут? Все это неизвестно, потому что течение воды неустойчиво. Точно так же даже спокойный поток воздуха, проходя между гор, прихотливо распадается на отдельные вихри. Во многих областях науки мы сталкиваемся с тем, что носит название *турбулентное течение*, не поддающееся пока нашему анализу. Так что давайте лучше от темы «погода» перейдем побыстрей к геологии!

Главный вопрос геологии заключается в том, чтó сделало Землю такой, какая она есть? Самые очевидные из таких процессов происходят у нас на глазах: реки подмывают берега, поля заносит пылью и т. д. Это понять довольно легко, но ведь кроме эрозии, помимо разрушения должно что-то и обратное происходить. В среднем горы сейчас не ниже, чем в прошлом. Следовательно, должен происходить и процесс *горообразования*.

Изучая геологию, вы убедитесь, что действительно происходит и горообразование, и вулканизм, но никто их не понимает; не понимает того, чтó составляет половину геологии. Действительно, природа вулканов не понята. Отчего бывают землетрясения, тоже в конечном счете не понято. Понимают, конечно, что если что-то с чем-то столкнется, то что-то треснет, что-то сдвинется — все это хорошо. Но чтó толкнуло, почему толкнуло? Существует теория, что внутри Земли имеются течения — происходит циркуляция из-за различия температур снаружи и внутри — и они в своем движении слегка толкают поверхность Земли. А если где-то встречаются два противных течения, то там должно накапливаться вещество, появляться горные хребты, они окажутся в сильно напряженном состоянии, возникнут вулканы, произойдут землетрясения.

Что можно сказать о недрах Земли? Хорошо известна скорость волн землетрясений в Земле и распределение плотности внутри нашей планеты. Но физики не смогли создать хорошей теории плотности вещества при давлениях, ожидаемых в центре Земли. Иными словами, мы не представляем себе слишком хорошо свойств вещества в таких условиях. Со своей планетой мы справляемся куда хуже, нежели с состоянием вещества в звездах. Необходимый для этого математический аппарат не разработан, он, по-видимому, чрезвычайно сложен; не исключено, однако, что найдется кто-то, кто поймет важность этой проблемы и разработает ее. Другое дело, что, даже вычислив плотность, мы не сможем представить себе циркулирующие течения или разобраться в свойствах горных пород при сверхвысоких давлениях. Мы не умеем предсказывать, насколько быстро эти породы «поддадутся» давлению; только опыт ответит на эти вопросы.

§ 6. *Психология*

Рассмотрим, наконец, еще одну науку — *психологию*. Сразу же уместно заметить, что психоанализ — это не наука; в лучшем случае это медицинский процесс, а скорее всего — знахарство. В психоанализе существует теория происхождения болезней — разные там «духи» и прочее. Знахарь тоже имеет теорию, по которой болезнь, скажем малярию, вызывает дух, витающий в воздухе; ее не вылечишь, если потрясти змеей над головой больного, а вот хинин помогает. Итак, если вы заболеете, советую вам отправиться к знахарю, потому что он лучше всех в племени разбирается в болезнях; однако его знание — это не наука. Психоанализ не был достаточно проверен экспериментально, и невозможно привести перечень случаев, когда он помогает, а когда не помогает и т. д.

Другие ветви психологии, а в нее входит, например, физиология ощущения (что происходит в глазе, а что в мозге), пожалуй, не столь интересны. Но в них были достигнуты хотя и малые, но вполне реальные успехи. Вот одна из интереснейших технических задач (хотите называйте ее психологией, хотите — нет). Центральная проблема в изучении мышления, или, если угодно, нервной системы, такова: пусть животное чему-либо научилось, пусть оно умеет делать что-то, чего прежде не умело; значит, клетки его мозга, если они состоят из атомов, изменились. *В чем же состоит это изменение*? Мы запечатлели что-то в своей памяти. Где это? Что там можно увидеть теперь? Этого мы не знаем. Мы запомнили какое-то число. Что это значит? Что изменилось в нервной системе? Неизвестно. Это очень важная проблема, совершенно притом нерешенная. Даже если допустить, что в нас имеется какой-то механизм памяти, то все равно мозг — это столь невообразимая масса пересекающихся проводов и нервов, что, по всей вероятности, прямой анализ невозможен. Аналог этого — вычислительные машины и их элементы; в них тоже множество проводов, есть и элементы, похожие на синапсы (нервные связи). Жаль, что у нас нет времени разобрать интересный вопрос об отношении между мыслью и вычислительными машинами. Следует понимать все же, что этот вопрос очень мало скажет нам о реальной сложности повседневного поведения человека. Люди столь различны! И понадобится немало времени, чтоб в этом разобраться. Следует начать издалека. Если бы даже нам удалось представить, как действует *собака*, то и этого оказалось бы слишком мало. Собаку понять куда легче, но и то никто не может объяснить, как она действует.

§ 7. *С чего все пошло?*

Чтобы физика могла быть полезной другим наукам в отношении *теории*, а не только своими приборами и изобретениями, эти науки должны снабдить физика описанием их объекта на физическом языке. Если биолог спросит: «Почему лягушка прыгает?», то физик не сможет ответить. Но если он расскажет, чтó такое лягушка, что в ней столько-то молекул, что вот в этом месте у нее нервы и т. д., то это уже совсем иное дело. Если геолог более или менее толково объяснит нам, что такое Земля, а астроном — что такое звезды, тогда можно попробовать в этом разобраться. Чтобы был какой-то толк от физической теории, нужно знать, где расположены атомы. Чтобы понять химию, мы должны точно знать, из каких атомов состоят интересующие нас вещества, иначе мы ничего не проанализируем. Конечно, это лишь одно из ограничений.

Существует и другой *тип* задач в соседних науках, который в физике отсутствует. Назовем его, не имея лучшего термина, вопросом истории. *С чего все пошло*? Как все стало таким, как оно есть? Если, например, все в биологии будет нами понято, возникнет естественный вопрос: как появились все существа на Земле? Этим занимается теория эволюции — важная часть биологии. В геологии нам хочется знать не только, как образуются горы, но и как вначале возникла сама Земля, солнечная система и т. д. Это, естественно, приводит нас к желанию узнать, из какого рода материи складывалась тогда Вселенная. Как развились звезды? Каковы были начальные условия? Это — проблема астрономической истории. Сейчас многое прояснилось в происхождении звезд, элементов, из которых мы состоим, и даже чуточку стало ясней происхождение самой Вселенной.

В настоящее время физика не изучает вопросы истории. Мы не задаем вопрос: «Вот законы физики, как они возникли?» Мы не считаем в настоящее время, что законы физики со временем как-то изменяются, что они прежде были иными, нежели ныне. Конечно, это *не исключено*, и если выяснится, что это *и впрямь так*, то исторические вопросы физики переплетутся с остальной историей Вселенной, и тогда физик будет обсуждать те же проблемы, что и астрономы, геологи и биологи.

Наконец, существует физическая проблема, общая многим наукам, очень старая к тому же, но до сего времени не решенная. Это не проблема поиска новых элементарных частиц, нет, это другой вопрос — вопрос давно, свыше ста лет назад, отставленный наукой в сторону. Ни один физик еще не смог математически безупречно проанализировать его, несмотря на его важность для сопредельных наук. Это — анализ *циркуляции*, или *вихревой жидкости*. Если проследить эволюцию звезды, то рано или поздно мы подойдем к такому моменту, когда в звезде начинается конвекция; и с этого момента мы уже не знаем, что будет дальше. Через несколько миллионов лет происходит взрыв звезды, но причина этого для нас остается загадкой. Мы не умеем анализировать погоду. Мы не знаем картины движений, которые должны происходить внутри Земли. В простейшей форме задача такова: пропустим через очень длинную трубку на большой скорости воду. Спрашивается: какое нужно давление, чтобы прогнать сквозь трубку данное количество воды? И никто, основываясь только на первичных законах и на свойствах самой воды, не умеет ответить на этот вопрос. Если вода течет неторопливо или когда сочится вязкая жижа вроде меда, то мы прекрасно все умеем. Ответ вы можете найти, например, в любом вашем учебнике. А вот с настоящей, мокрой водой, брызжущей из шланга, справиться мы не в силах. Это — центральная проблема, которую в один прекрасный день нам понадобится решить, а мы это не умеем.

Поэт сказал однажды: «Весь мир в бокале вина». Мы, вероятно, никогда не поймем, какой смысл он в это вкладывал, ибо поэты пишут не для того, чтобы быть понятыми. Но бесспорно, что, внимательно взглянув в бокал вина, мы поистине откроем целый мир. В нем и физические явления (искрящаяся жидкость, испарение, меняющееся в зависимости от погоды и вашего дыхания, блеск стекла) и атомы (о которых нам говорит уже наше воображение). Стекло — это очищенная горная порода; в его составе кроются секреты возраста Вселенной и развития звезд. А из какого удивительного набора реактивов состоит это вино! Как они возникли? Там есть закваска, ферменты, вытяжки и разные другие продукты. Ведь в вине скрывается большое обобщение: вся жизнь есть брожение. Изучая химию вина, нельзя не открыть, как это и сделал Луи Пастер, причины многих болезней. Сколько жизни в этом кларете, если он навязывает нашему сознанию свой дух, если мы должны быть столь осторожны с ним! Наш ограниченный ум для удобства делит этот бокал вина, этот мир на части: физику, биологию, геологию, астрономию, психологию и т. д., но ведь природа на самом деле никакого деления не знает! Давайте же и мы сольем это воедино, не забывая все же, что́ мы увидели. Пусть этот бокал вина доставит напоследок еще одно наслаждение: выпить его и обо всем позабыть!

Глава 4

СОХРАНЕНИЕ ЭНЕРГИИ

§ 1. *Что такое энергия?*

С этой главы, покончив с общим описанием природы вещей, мы начнем подробное изучение различных физических вопросов. Чтобы показать характер идей и тип рассуждений, которые могут применяться в теоретической физике, мы разберем один из основных законов физики — сохранение энергии.

Существует факт, или, если угодно, *закон*, управляющий всеми явлениями природы, всем, что было известно до сих пор. Исключений из этого закона не существует; насколько мы знаем, он абсолютно точен. Название его — *сохранение энергии*. Он утверждает, что существует определенная величина, называемая энергией, которая не меняется ни при каких превращениях, происходящих в природе. Само это утверждение весьма и весьма отвлеченно; это по существу математический принцип, утверждающий, что существует некоторая численная величина, которая не изменяется ни при каких обстоятельствах. Это отнюдь не описание механизма явления или чего-то конкретного, просто-напросто отмечается то странное обстоятельство, что можно подсчитать какое-то число и затем спокойно следить, как природа будет выкидывать любые свои трюки, а потом опять подсчитать это число — и оно останется прежним. (Ну, все равно, как слон на черном шахматном поле: как бы ни разворачивались события на доске, какие бы ходы ни делались, слон все равно окажется на черном поле. Наш закон как раз такого типа.) И поскольку утверждение это отвлеченно, то мы выявим его смысл на некоторой аналогии.

Познакомимся с мальчиком, этаким Монтигомо Ястребиный Коготь; у него есть большие кубики, которые даже он не может ни сломать, ни разделить на части. Все они одинаковы. Пускай их у него 28 штук. Мама оставляет его утром дома наедине с этими кубиками. Каждый вечер она подсчитывает, сколько у него кубиков,— она немного любопытна!— и открывает поразительную закономерность: чтó бы ее сынишка ни вытворял с кубиками, их все равно оказывается 28! Так это тянется довольно долго, и вдруг в один прекрасный день она насчитывает только 27 штук. После недолгих поисков кубик обнаруживают под ковром: ей приходится все обыскать, чтобы убедиться в неизменности числа кубиков. В другой раз кубиков оказывается 26. Снова тщательное исследование показывает, что окно отворено; взглянув вниз, она видит два кубика в траве. В третий раз подсчет дает 30 кубиков! Это приводит маму в полное замешательство, но потом она вспоминает, что в гости приходил соседский Кожаный Чулок, видимо, он захватил с собой свои кубики и позабыл их здесь. Она убирает лишние кубики, затворяет плотно окно, не пускает больше гостей в дом, и тогда все опять идет как следует, пока однажды подсчет не дает 25 кубиков... Правда, в комнате имеется ящик для игрушек, маме хочется и в него заглянуть, но мальчик кричит: «Не открывай мой ящик!» и начинает рёв; мама к ящику не допускается. Как же быть? Но мама любопытна и хитра, она придумывает выход! Она знает, что кубик весит 500 *г*; она взвешивает ящик, когда все 28 кубиков на полу, он весит 1 *кг*. Когда в следующий раз она проверяет количество кубиков, она опять взвешивает ящик, вычитает 1 *кг* и делит на 500 *г*. Она открывает, что

$$\begin{pmatrix}\text{Число имеющихся}\\ \text{кубиков}\end{pmatrix} + \frac{\text{Вес ящика} - 1\ \textit{кг}}{500\ \textit{г}} = \begin{matrix}\text{Постоянная}\\ \text{величина.}\end{matrix} \qquad (4.1)$$

Но опять возникают отклонения и от этой формулы. Снова в результате кропотливых изысканий выясняется, что при этом уровень воды в стиральной машине почему-то изменился. Дитя, оказывается, швыряет кубики в воду, а мать не может их увидеть — вода мыльная; но она может узнать, сколько в воде кубиков, добавив в формулу новый член. Первоначальный уровень воды 40 *см*, а каждый кубик подымает воду на $^1/_3$ *см*, так что новая формула такова:

$$\begin{pmatrix}\text{Число имеющихся}\\ \text{кубиков}\end{pmatrix} + \frac{\text{Вес ящика} - 1\ \textit{кг}}{500\ \textit{г}} +$$

$$+ \frac{\text{Уровень воды} - 40\ \textit{см}}{^1/_3\ \textit{см}} = \begin{matrix}\text{Постоянная}\\ \text{величина.}\end{matrix} \qquad (4.2)$$

Мир представлений мамы постепенно расширяется, она находит весь ряд членов, позволяющих рассчитывать, сколько кубиков находится там, куда она заглянуть не может. В итоге она открывает сложную формулу для количества, которое *должно быть рассчитано* и которое всегда остается тем же самым, чтó бы ее дитя ни натворило.

В чем же аналогия между этим примером и сохранением энергии? Самое существенное, от чего надлежит отвлечься в этой картинке,— это что *кубиков не существует.* Отбросьте в выражениях (4.1) и (4.2) первые члены и вы обнаружите, что считаете более или менее отвлеченные количества. Аналогия же в следующем. Во-первых, при расчете энергии временами часть ее уходит из системы, временами же какая-то энергия появляется. Чтобы проверить сохранение энергии, мы должны быть уверены, что не забыли учесть ее убыль или прибыль. Во-вторых, энергия имеет множество *разных форм* и для каждой из них есть своя формула: энергия тяготения, кинетическая энергия, тепловая энергия, упругая энергия, электроэнергия, химическая энергия, энергия излучения, ядерная энергия, энергия массы. Когда мы объединим формулы для вклада каждой из них, то их сумма не будет меняться, если не считать убыли энергии и ее притока.

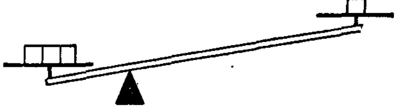
Важно понимать, что физике сегодняшнего дня неизвестно, *что такое* энергия. Мы не считаем, что энергия передается в виде маленьких пилюль. Ничего подобного. Просто имеются формулы для расчета определенных численных величин, сложив которые, мы получаем число 28 — всегда одно и то же число. Это нечто отвлеченное, ничего не говорящее нам ни о механизме, ни о *причинах* появления в формуле различных членов.

§ 2. *Потенциальная энергия тяготения*

Сохранение энергии можно понять, только если имеются формулы для всех ее видов. Я сейчас рассмотрю формулу для энергии тяготения близ земной поверхности; я хочу вывести ее, но не так, как она впервые исторически была получена, а при помощи специально придуманной для этой лекции нити рассуждений. Я хочу вам показать тот достопримечательный факт, что нескольких наблюдений и строгого размышления достаточно, чтобы узнать о природе очень и очень многое. Вы увидите, в чем состоит работа физика-теоретика. Вывод подсказан блестящими рассуждениями Карно о к. п. д. тепловых машин*.

Рассмотрим грузоподъемные машины, способные подымать один груз, опуская при этом другой. Предположим еще, что

* Нас здесь интересует не столько итоговая формула (4.3) (она вам, должно быть, знакома), сколько возможность получить ее теоретическим путем.



Фиг. 4.1. Простая грузоподъемная машина.

вечное движение этих машин невозможно. (Именно недопустимость вечного движения и есть общая формулировка закона сохранения энергии.) Определяя вечное движение, нужно быть очень осторожным. Сделаем это сначала для грузоподъемных машин. Если мы подняли и опустили какие-то грузы, восстановили прежнее состояние машины и после этого обнаружили, что в итоге *груз поднят*, то мы получили вечный двигатель: поднятый груз может привести в движение что-то другое. Здесь существенно, чтобы машина, поднявшая груз, вернулась в *первоначальное положение* и чтобы она *ни от чего не зависела* (чтобы не получала от внешнего источника энергию для подъема груза, словом, чтобы не приходил в гости Кожаный Чулок со своими кубиками).

Очень простая грузоподъемная машина показана на фиг. 4.1. Она подымает тройной вес. На одну чашку весов помещают три единицы веса, на другую — одну. Правда, чтобы она и впрямь заработала, с левой чашки необходимо снять хоть малюсенький грузик. И наоборот, чтобы поднять единичный груз, опуская тройной, тоже нужно немного сплутовать и убрать с правой чашки часть груза. Мы понимаем, что в настоящей подъемной машине надо создать небольшую перегрузку на одну сторону, чтобы поднять другую. Но пока махнем на это рукой. Идеальные машины, хотя их и нет на самом деле, не нуждаются в перевесе. Машины, которыми мы фактически пользуемся, можно считать в некотором смысле *почти* обратимыми, т. е. если они поднимают тройной вес при помощи единичного, то они могут поднять также почти единичный вес, опуская тройной.

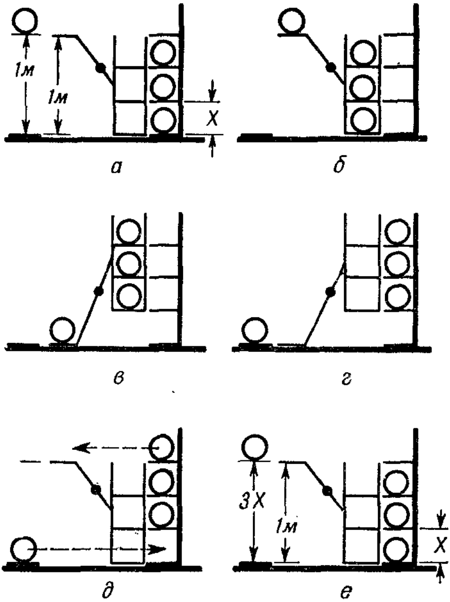
Представим, что имеются два класса машин — *необратимые* (сюда входят все реальные машины) и *обратимые*, которых на самом деле не существует; как бы тщательно ни изготавливать подшипники, рычаги и т. д., таких машин все равно не построишь. Но мы предположим все же, что обратимая машина существует и способна, опустив единичный груз (килограмм или грамм — все равно) на единичную длину, поднять в то же время тройной груз. Назовем эту обратимую машину машиной A. Положим, что данная обратимая машина подымает тройной груз на высоту X. Затем предположим, что имеется другая машина B, не обязательно обратимая, которая тоже опускает единичный вес на единицу длины, но поднимает тройной вес на высоту Y. Теперь можно доказать, что Y не больше X, т. е. что нельзя соорудить машину, которая смогла бы поднять груз *выше*, чем обратимая. Почему? Посмотрите. Пусть Y выше X.

Мы берем единичный вес и опускаем его на единицу длины машиной B, тем самым поднимая тройной груз на высоту Y. Затем мы можем опустить груз с высоты Y до X, *получив свободную энергию*, и включить обратимую машину A в обратную сторону, чтобы опустить тройной груз на X и поднять единичный вес на единичную высоту. Единичный вес очутится там, где он был прежде, и обе машины окажутся в состоянии начать работу сызнова! Итак, если Y больше X, то возникает вечный двигатель, а мы предположили, что такого не бывает. Мы приходим к выводу, что Y *не выше* X, т. е. из всех машин, которые можно соорудить, обратимая — наилучшая.

Легко понять также, что все обратимые машины должны поднимать груз *на одну и ту же высоту*. Положим, что машина B также обратима. То, что Y не больше X, остается, конечно, верным, но мы можем пустить машину в обратную сторону, повторить те же рассуждения и получить, что X *не больше* Y. Это очень знаменательное наблюдение, ибо оно позволяет узнать, на какую высоту разные машины могут поднимать грузы, *не заглядывая в их внутреннее устройство*. Если кто-нибудь придумал невероятно запутанную систему рычагов для подъема тройного веса на какую-то высоту за счет опускания единичного веса на единицу высоты и если мы сравним эту машину с простым обратимым рычагом, способным проделать то же самое, то первая машина не поднимет вес выше второй (скорее наоборот). А если его машина обратима, то мы знаем точно, на *какую* высоту она будет поднимать грузы.

Вывод: каждая обратимая машина, как бы она ни действовала, опуская 1 *кг* на 1 *м*, всегда подымает 3 *кг* на одну и ту же высоту X. Ясно, что мы доказали очень полезный всеобщий закон. Но возникает вопрос: чему равно X?

Пусть у нас есть обратимая машина, способная поднимать 3 *кг* за счет 1 *кг* на высоту X. Поместим три шара на стеллаж (как на фиг. 4.2). Четвертый лежит на подставке в одном метре от пола. Машина может поднять три шара, опустив один шар на 1 *м*. Устроим подвижную платформу с тремя полками высотой X, и пусть высота полок стеллажа тоже будет X (фиг. 4.2,*а*). Перекатим сперва шары со стеллажа на полки платформы (фиг. 4.2,*б*); предположим, что для этого энергии не понадобится, потому что полки и стеллаж находятся на одной высоте. Затем включим обратимую машину: она скатит одиночный шар на пол и подымет платформу на высоту X (фиг. 4.2,*в*). Но мы сконструировали платформу столь остроумно, что шары опять оказались в точности на уровне полок стеллажа. Разгрузим же шары с платформы на стеллаж (фиг. 4.2,*г*). После разгрузки машина вернется в первоначальное положение. Теперь уже три шара лежат на трех верхних полках стеллажа, а четвертый шар — на полу. Но смотрите, какая странная вещь: по существу



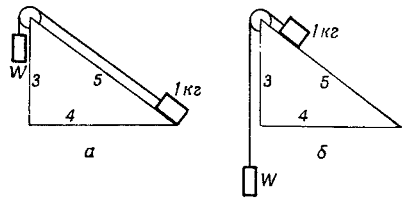
Фиг. 4.2. Обратимая машина. *а* — начальное положение; *б* — загрузка шаров; *в* — 1 *кг* поднимает 3 *кг* на высоту *X*; *г* — разгрузка шаров; *д* — восстановление; *е* — конечное положение.

два шара мы не поднимали вовсе, ведь на полках *2* и *3* шары как лежали вначале, так лежат и теперь. В итоге поднялся только *один шар*, но зато на высоту $3X$. Если бы высота $3X$ оказалась больше 1 *м*, то можно было бы *опустить* шар, чтобы вернуть машину к начальным условиям (фиг. 4.2,*е*) и начать работу сначала. Значит, высота $3X$ не может быть больше 1 *м*, ибо начнется вечное движение. Точно так же можно доказать, что 1 *м не может быть больше* $3X$: машина обратима, пустим ее назад и докажем. Итак, $3X$ *ни больше, ни меньше* 1 *м*. Мы открыли при помощи одних только рассуждений закон: $X = {}^1/_3$ *м*. Обобщить его легко: 1 *кг* падает при работе обратимой машины с некоторой высоты; тогда машина способна поднять p *кг* на $1/p$ высоты. Если, другими словами, 3 *кг* умножить на высоту их подъема (X), то это равно 1 *кг*, умноженному на высоту его падения (1 *м*). Помножив все грузы в машине на высоту, на которой они лежат, дайте машине поработать и опять помножьте все веса на их высоты подъема; в итоге *должно выйти то же самое.* (Мы перешли от случая, когда двигался только один груз, к случаю, когда за счет опускания одного груза поднимается несколько грузов. Но это, надеюсь, понятно?)

Назовем сумму весов, умноженных на высоту, *потенциальной энергией тяготения*, т. е. энергией, которой обладает тело вследствие своего положения в пространстве по отношению к земле. Формула для энергии тяготения, пока тело не слишком далеко от земли (вес при подъеме ослабляется), такова:

$$\left(\begin{array}{c}\text{Потенциальная энергия тяготения}\\ \text{для одного тела}\end{array}\right) = (\text{Вес}) \times (\text{Высота}). \qquad (4.3)$$

Фиг. 4.3. Наклонная плоскость.



Не правда ли, очень красивое рассуждение? Вопрос только в том, справедливо ли оно. (Ведь, в конце концов, природа *не обязана* следовать нашим рассуждениям.) Например, не исключено, что в действительности вечное движение возможно. Или другие предположения ошибочны. Или мы просмотрели что-то в своих рассуждениях. Поэтому их непременно нужно проверить. И вот — справедливость их *подтверждает опыт.*

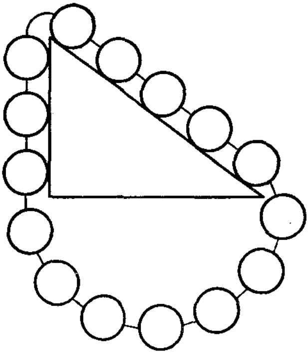
Потенциальная энергия — это общее название для энергии, связанной с расположением по отношению к чему-либо. В данном частном случае это — *потенциальная энергия тяготения.* Если же производится работа против электрических сил, а не сил тяготения, если мы «поднимаем» заряды «над» другими зарядами с помощью многочисленных рычагов, тогда запас энергии именуется *электрической потенциальной энергией.* Общий принцип состоит в том, что изменения энергии равны силе, умноженной на то расстояние, на котором она действует:

$$\begin{pmatrix}\text{Изменение}\\ \text{энергии}\end{pmatrix} = (\text{Сила}) \times \begin{pmatrix}\text{Расстояние, на котором}\\ \text{она действует}\end{pmatrix}. \tag{4.4}$$

По мере чтения курса мы еще не раз будем возвращаться к другим видам потенциальной энергии.

Принцип сохранения энергии во многих обстоятельствах оказывается очень полезен при предсказании того, что́ может произойти. В средней школе мы учили немало правил о блоках и рычагах. Мы можем теперь убедиться, что все эти «законы» *сводятся к одному*, и нет нужды запоминать 75 правил. Вот вам простой пример: наклонная плоскость. Пусть это треугольник со сторонами 3, 4, 5 (фиг. 4.3). Подвесим к блочку груз весом 1 *кг* и положим его на плоскость, а с другой стороны подвесим груз W.

Мы хотим знать, какова должна быть тяжесть W, чтобы уравновесить груз 1 *кг*. Рассуждаем так. Если грузы W и 1 *кг* уравновешены, то это — обратимое состояние, и веревку можно двигать вверх—вниз. Пусть же вначале (фиг. 4.3,*а*) 1 *кг* находится внизу плоскости, а груз W — наверху. Когда W соскользнет вниз, груз 1 *кг* окажется наверху, а W опустится на

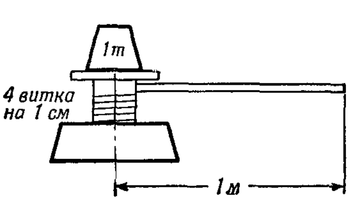


Фиг. 4.4. Это выгравировано на надгробии Стевина.

длину склона (фиг. 4.3,*б*), т. е. на 5 *м*. Но ведь мы *подняли* 1 *кг* только на высоту 3 *м*, хотя опустили W на 5 *м*. Значит, $W = {}^3/_5$ *кг*. Заметьте, что этот ловкий вывод получен не из разложения сил, а из *сохранения энергии*. Ловкость, впрочем, относительна. Существует другой вывод, куда красивее. Он придуман Стевином и даже высечен на его надгробии. Фиг. 4.4 объясняет, почему должно получиться ${}^3/_5$ *кг*: цепь не вращается и нижняя ее часть уравновешена сама собой, значит сила тяги пяти звеньев с одной стороны должна уравнять силу тяги трех звеньев с другой (по длине сторон). Глядя на диаграмму, становится очевидно, что $W = {}^3/_5$ *кг*. (Неплохо было бы, если бы когда-нибудь что-нибудь подобное высекли и на вашем надгробном камне.)

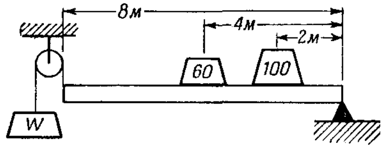
А вот задача посложнее: домкрат, показанный на фиг. 4.5. Посмотрим, как в таком случае применять этот принцип. Для вращения домкрата служит ручка длиной 1 *м*, а нарезка винта имеет 4 витка на 1 *см*. Какую силу нужно приложить к ручке, чтобы поднять 1 *т*? Желая поднять 1 *т* на 1 *см*, мы должны обойти домкрат четырежды, каждый раз делая по 6,28 *м* ($2\pi r$), а всего 25,12 *м*. Используя различные блоки и т. п., мы действительно можем поднять 1 *т* с помощью неизвестного груза W, приложенного к концу ручки. Ясно, что W равно примерно 400 *г*. Это — следствие сохранения энергии.

И еще более сложный пример (фиг. 4.6). Подопрем один конец стержня (или рейки) длиной 8 *м*. Посредине рейки поместим груз весом 60 *кг*, а в 2 *м* от подпорки — груз весом 100 *кг*. Сколько надо силы, чтобы удержать рейку за другой конец в равновесии, пренебрегая ее весом? Пусть мы прикрепили блок и перекинули через него веревку, привязав ее к концу рейки. Каков



Фиг. 4.5. Домкрат.

Фиг. 4.6. Нагруженный стержень, подпертый с одного конца.



же должен быть вес W, уравновешивающий стержень? Представим, что вес опустился на произвольное расстояние (для простоты пусть это будет 4 *см*); на сколько тогда поднимутся наши два груза? Середина рейки на 2 *см*, а второй груз (он лежит на четверти длины рейки) на 1 *см*. Значит, в согласии с правилом, что сумма весов, умноженных на высоты, не меняется, мы должны написать: вес W на 4 *см* вниз плюс 60 *кг* на 2 *см* вверх плюс 100 *кг* на 1 *см* вверх, что после сложения должно дать нуль:

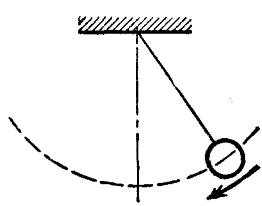
$$-4W+2\times 60+1\times 100=0, \qquad W=55\ \text{кг}. \tag{4.5}$$

Выходит, чтобы удержать рейку, хватит 55 *кг*. Таким же путем можно разработать законы «равновесия» — статику сложных мостовых сооружений и т. д. Такой подход именуют *принципом виртуальной* (т. е. возможной или воображаемой) *работы*, потому что для его применения мы обязаны *представить* себе, что наша система чуть сдвинулась, даже если она *в действительности* не двигалась или вовсе *неспособна* двигаться. Мы используем небольшие воображаемые движения, чтобы применить принцип сохранения энергии.

§ 3. Кинетическая энергия

Чтобы рассказать о другом виде энергии, рассмотрим маятник (фиг. 4.7). Отведем его в сторону и затем отпустим. Он начнет качаться взад и вперед. Двигаясь от края к середине, он теряет высоту. Куда же девается потенциальная энергия? Когда он опускается до самого низа, энергия тяготения пропадает, однако он вновь взбирается вверх. Выходит, что энергия тяготения должна превращаться в другую форму. Ясно, что способность взбираться наверх остается у маятника благодаря тому, что

Фиг. 4.7. Маятник.



он *движется*; значит, в наинизшей точке качания энергия тяготения переходит в другой вид энергии.

Мы должны получить формулу для энергии движения. Вспоминая наши рассуждения о необратимых машинах, мы легко поймем, что, двигаясь мимо наинизшей точки, маятник должен обладать некоторым количеством энергии, которая позволит ему подняться на определенную высоту, и при этом независимо от *механизма* подъема или *пути* подъема. Возникает формула, выражающая равноценность обоих видов энергии, подобная той, которую писала мама, подсчитывая кубики. Получается другая форма представления энергии. Легко понять, какой она должна быть. Кинетическая энергия внизу равна весу, умноженному на высоту, на которую этот вес может подняться из-за своей скорости: к. э. $= WH$.

Нам нужна формула, предсказывающая высоту подъема по быстроте движения тела. Если мы толкнем что-нибудь с определенной скоростью, скажем, прямо вверх, то это тело достигнет определенной высоты; мы не знаем пока, какова эта высота, но нам ясно, что она зависит от скорости и что она войдет в нужную нам формулу. Значит, чтобы найти формулу для кинетической энергии тела, движущегося со скоростью V, нужно вычислить высоту, до которой она может добраться, и умножить на тяжесть тела. В одной из следующих глав мы убедимся, что получается

$$\text{к. э.} = \frac{WV^2}{2g}. \tag{4.6}$$

Конечно, тот факт, что движение обладает энергией, никак не связан с полем тяготения, в котором находится тело. Неважно, *откуда* явилось движение. Это общая формула для любых скоростей. Кстати, и (4.3) и (4.6) — формулы приближенные; первая становится неправильной на больших высотах (настолько больших, что тяжесть тела ослабляется), а вторая — на больших скоростях (настолько больших, что требуются релятивистские поправки). Однако, когда мы вводим точные формулы для энергии, закон сохранения энергии опять соблюдается.

§ 4. *Прочие формы энергии*

В таком вот роде можно и дальше показывать существование энергии в разных формах. Отметим, во-первых, упругую энергию. Растягивая пружину, мы должны совершить какую-то работу, ведь растянутая пружина способна поднять груз. После растяжения она получает возможность выполнить работу. Если бы мы теперь составили сумму произведений весов на высоты, то она больше не сошлась бы, и нам пришлось бы в нее что-то вставить, чтобы учесть напряженность пружинки. Упругая энергия — это и есть формула растянутой пружины. Сколько же в ней энергии?

Когда вы отпускаете пружину, то упругая энергия при переходе пружины через точку равновесия обращается в энергию кинетическую; и далее все время совершаются переходы от сжатия и растяжения пружины к кинетической энергии движения (в переходы эти замешиваются еще изменения энергии тяготения, но если это нам мешает, то можно пружину не подвешивать, а положить). И так продолжается до тех пор, пока потери энергии... Постойте! Выходит, мы все время жульничали: то совершали обвес, чтобы рычаг наклонился, то говорили, что машины обратимы, то уверяли, что они будут работать вечно. А машина в конечном счете останавливается. Где же теперь, когда пружина перестала сжиматься-разжиматься, находится энергия? Она перешла в *новую* форму энергии — *тепло*.

В пружине или рычаге имеются кристаллы, состоящие из множества атомов; и при сборке частей машины требуется особая точность и тщательность, чтобы в работе машины ни один из атомов не сдвинулся со своего места, не поколебался. Нужно быть очень осторожным. Ведь обычно, когда машина вертится, то и дело происходят какие-то удары, покачивания, вызванные неровностями материала, и атомы начинают дрожать. Так теряются маленькие доли энергии; по мере того как движение замедляется, все сильнее становятся случайные, неожиданные дрожания атомов вещества машины. Конечно, это все еще кинетическая энергия, но не связанная с видимым движением.

Позвольте, какая кинетическая энергия? Что за сказка? Откуда известно, что это все еще кинетическая энергия? Оказывается, термометр способен обнаружить, что пружина или рычаг *нагреваются*, т. е. что и впрямь происходит определенный прирост кинетической энергии. Мы ее называем *тепловой*, а сами помним, что никакая это не новая форма энергии, а всего лишь кинетическая, но внутреннего движения. (Одна из трудностей всех опытов с большим количеством вещества в том и состоит, что невозможно взаправду показать сохраняемость энергии, сделать настоящую обратимую машину; каждый раз, когда поворачивается большой комок вещества, атомы не остаются в прежнем состоянии, в их систему включается некоторое количество случайного движения. Увидеть это нельзя, но измерить термометрами и другими приборами можно.)

Существует еще немало других форм энергии, но мы не можем сейчас описывать их более или менее подробно.

Имеется энергия электрическая, связанная с притяжением и отталкиванием электрических зарядов.

Есть энергия излучения, или энергия света,— одна из форм электрической энергии, ибо свет может быть представлен как колебания электромагнитного поля.

Бывает энергия химическая — энергия, высвобождаемая в химических реакциях. Упругая энергия в некотором роде похожа на химическую; и химическая энергия есть энергия притяжения атомов друг к другу, и упругая энергия тоже. В настоящее время мы это понимаем следующим образом: химическая энергия складывается из двух частей — энергии движения электронов внутри атомов, т. е. из кинетической части, и электрической энергии притяжения электронов к протонам, т. е. из электрической части.

Дальше, бывает ядерная энергия, связанная с расстановкой частиц в ядре; для нее тоже существует формула, хотя основные законы нам и неведомы. Мы знаем, что это не электричество, не тяготение, не чистая химия... А что это такое? А кто его знает! Видимо, это добавочная форма энергии.

И наконец, теория относительности видоизменяет формулу кинетической энергии, так что название это становится условным, сочетая ее с другим понятием: *энергией массы*. Любой объект обладает энергией уже потому, что он *существует*. Если электрон и позитрон спокойно стоят рядом, ничем не занимаясь (ни тяготением, ни чем иным), а потом сливаются и исчезают, то освобождается определенная порция энергии излучения, и эту порцию можно подсчитать. Все, что для этого нужно,— это знать массу объекта. Неважно, что это такое — два тела исчезли, определенная энергия появилась. Формулу впервые придумал Эйнштейн: это $E = mc^2$.

Из наших рассуждений ясно, что закон сохранения энергии незаменим при анализе явления; мы уже показали это на ряде примеров, для которых мы не знали всех формул. Владей мы формулами для всех типов энергии, мы могли бы узнавать, не вдаваясь в детали, сколько процессов происходит в таком-то явлении. Оттого законы сохранения столь важны. Встает естественный вопрос: какие еще есть в физике законы сохранения.

Существуют еще два закона, сходных с законом сохранения энергии. Один называется сохранением импульса (или количества движения). Другой — сохранением момента количества движения. Позже мы подробней познакомимся с ними.

В конечном счете мы не понимаем законов сохранения достаточно глубоко. Нам непонятно сохранение энергии. Мы не можем представить себе энергию как некоторое количество неделимых порций. Вы, вероятно, слышали, что фотоны вылетают порциями и что энергия их равна постоянной Планка, умноженной на частоту. Это правда, но так как частота света может быть любой, то нет никакого закона, по которому энергия обязана иметь некоторую определенную величину. Это уже не кубики Монтигомо Ястребиного Когтя: любые количества энергии допустимы, по крайней мере в настоящее время. Для нас энергия — это не то, что можно пересчитать, а всего лишь математическая величина, абстракция, — обстоятельство довольно странное. В квантовой механике выявляется, что сохраняемость энергии тесно увязана с другим важным свойством мира — *с независимостью от абсолютного времени*. Мы можем поставить опыт в некоторый момент, а потом еще раз в другой момент; он будет протекать одинаково. Абсолютно ли верно это утверждение или нет — мы не знаем. Но если мы примем, что оно *абсолютно* верно, и добавим принципы квантовой механики, то из этого можно вывести принцип сохранения энергии. Это довольно тонкая и интересная вещь, которую нелегко пояснить. Другие законы сохранения также связаны между собой: сохранение импульса в квантовой механике — с утверждением, что неважно, *где* происходит опыт, его итог от этого не меняется. И подобно тому, как независимость от места связана с сохранением импульса, а независимость от времени — с сохранением энергии, точно так же от *поворота* наших приборов тоже ничего не должно изменяться; независимость от ориентации в пространстве имеет отношение к сохранению *момента количества движения*.

Кроме этого, существуют еще три закона сохранения; насколько ныне нам известно, они точные и понять их намного легче, так как по своей природе они близки к подсчету кубиков. Первый из них — *сохранение заряда*; он просто означает, что если подсчитать, сколько есть положительных зарядов, и из этого вычесть количество отрицательных, то число это никогда не изменится. Вы можете избавиться от положительных вместе с отрицательными, но не создадите никогда чистого избытка одних над другими. И прочие два закона похожи на этот. Один называют *сохранением числа барионов*. Имеется некоторое количество удивительных частиц (примеры: нейтрон и протон), называемых барионами. В любой реакции, где бы в природе она ни происходила, если подсчитать, сколько барионов было в начале процесса (считая антибарион за —1 барион), то в конце их число окажется тем же. Другой закон — *сохранение числа лептонов*. Группа частиц, называемых лептонами, включает электрон, мюон и нейтрино. Антиэлектрон, т. е. позитрон, считается за —1 лептон. Подсчет общего числа лептонов в реакции обнаруживает, что на входе и на выходе реакции это число одинаково, по крайней мере насколько нам сейчас известно.

Вот вам шесть законов сохранения: три замысловатых, связанных с пространством и временем, а три простых, связанных с обычным счетом.

К сохраняемости энергии *доступность* и *полезность* энергии не имеет никакого отношения. В атомах морской воды немало энергии движения, так как температура моря довольно высока, но нет никакой возможности направить эту энергию в определенное русло, не отобрав ее откуда-нибудь еще. Иначе говоря, хотя нам известен тот факт, что энергия сохраняется, но не так-то просто сохранить энергию, пригодную для человека. Законы, управляющие количеством пригодной для человека энергии, называются *законами термодинамики* и включают понятие, называемое *энтропией необратимых термодинамических процессов.*

Наконец, остановимся на том, откуда мы сегодня можем получать необходимый запас энергии. Энергией нас снабжают Солнце и дожди, уголь, уран и водород. Впрочем, и дожди, и уголь в конце концов без Солнца были бы невозможны. Хотя энергия сохраняется, природа, по всей видимости, этим ничуть не интересуется; она освобождает из Солнца множество энергии, но только одна двухмиллиардная часть ее падает на Землю. Природа сохраняет энергию, но в действительности о ней не заботится, расточая ее направо и налево. Мы уже получаем энергию из урана, мы можем получать ее и из водорода, но пока это получение связано со взрывами, с большой опасностью. Если бы мы смогли научиться управлять термоядерными реакциями, то энергия, которую можно получать, тратя по 10 *л* воды в секунду, равнялась бы всей электроэнергии, производимой сейчас за это время в Соединенных Штатах. Шестисот литров речной воды в минуту хватило бы, чтобы снабжать энергией всю страну! Именно физикам придется придумать, как избавить нас от нужды в энергии. И это, бесспорно, достижимо.

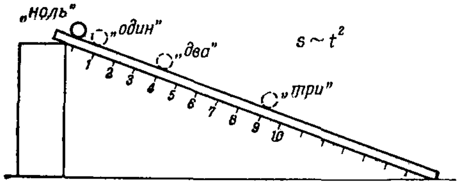
Глава 5

ВРЕМЯ И РАССТОЯНИЕ

§ 1. Движение

В этой главе мы рассмотрим понятия *время* и *расстояние*. Мы уже говорили, что физика, как, впрочем, любая другая наука, основывается на *наблюдениях*. Можно даже сказать, что развитие физических наук до их современного уровня в огромной степени зависело от фактов, основанных на *количественных* наблюдениях. Только с помощью количественных наблюдений можно получить количественные соотношения — сердце современной физики.

Многие считают, что физика берет свое начало с опыта, проведенного Галилеем 350 лет назад, а сам Галилей является первым физиком. До этого времени изучение движения было чисто философским и основывалось на доводах, которые были плодом фантазии. Большинство этих доводов были придуманы Аристотелем и другими греческими философами и рассматривались как «доказанные». Но Галилей был скептиком и поставил следующий опыт: по наклонной плоскости он пускал шар и наблюдал за его движением (фиг. 5.1). Галилей не просто смотрел, как катится шар, а измерял то *расстояние*, которое прошел шар, и определял *время*, в течение которого шар проходил это расстояние. Способ измерения расстояний был хорошо известен еще задолго до Галилея, однако точного способа измерения времени, особенно коротких интервалов, не было. Хотя впоследствии Галилей изобрел более совершенные часы (отнюдь не похожие на современные), но в своих первых опытах для отсчета равных промежутков времени он использовал собственный пульс. Давайте сделаем то же самое.



Фиг. 5.1. Шарик катится по наклонной плоскости.

Будем отсчитывать удары пульса в то время, пока шарик катится вниз: «Один... два... три... четыре... пять... шесть... семь... восемь...». Пусть кто-нибудь отмечает положение шарика на каждый счет. Теперь можно измерить *расстояние*, которое шарик прошел за один, два, три и т. д. равных интервала времени. Галилей сформулировал результат своих наблюдений следующим образом: если отмечать положения шарика через $1, 2, 3, 4, \ldots$ единицы времени от начала движения, то окажется, что эти отметки удалены от начального положения пропорционально числам $1, 4, 9, 16, \ldots$. Сейчас мы сказали бы, что расстояние пропорционально квадрату времени:

$$s \sim t^2.$$

Таким образом, изучение процесса *движения* (основы современной физики) начинается с вопросов: где и когда?

§ 2. Время

Разберем сначала, что́ мы понимаем под словом *время*. Что же *это такое*? Неплохо было бы найти подходящее определение понятия «время». В толковом словаре Вебстера, например, «время» определяется как «период», а сам «период» — как «время». Однако пользы от этого определения мало. Но и в определении «время — это то, что меняется, когда больше ничего не изменяется» не больше смысла. Быть может, следует признать тот факт, что время — это одно из понятий, которое определить невозможно, и просто сказать, что это нечто известное нам: это то, что отделяет два последовательных события!

Дело, однако, не в том, как дать *определение* понятия «время», а в том, как его измерить. Один из способов измерить время — это использовать нечто регулярно повторяющееся, нечто *периодическое*. Например, день. Казалось бы, дни регулярно следуют один за другим. Но, поразмыслив немного, сталкиваешься с вопросом: периодичны ли они? Все ли дни имеют одинаковую длительность? Создается впечатление, что летние дни длиннее зимних. Впрочем, некоторые зимние дни кажутся ужасно длинными, особенно если они скучны. О них обычно говорят: «Ужасно длинный день!»

Однако, по-видимому, все дни в среднем одинаковы. Можно ли проверить, действительно ли они одинаковы и от одного дня до другого, хотя бы в среднем, проходит ли одно и то же время? Для этого необходимо произвести сравнение с каким-то другим периодическим процессом. Давайте посмотрим, как такое сравнение можно, например, провести с помощью песочных часов. С помощью таких часов мы можем создать периодический процесс, если будем стоять возле них день и ночь и переворачивать каждый раз, когда высыпятся последние крупинки песка.

Если затем подсчитать число переворачиваний песочных часов от каждого утра до следующего, то можно обнаружить, что число «часов» (т. е. число переворачиваний) в разные дни различно. Кто же виноват в этом? Может быть, Солнце? Может быть, часы? А может, и то и другое? После некоторых размышлений можно прийти к мысли, что следует считать «часы» не от утра до утра, а от полудня до полудня (полдень — это, конечно, не 12 часов, а момент, когда Солнце находится в наивысшем положении). На этот раз оказывается, что в каждых сутках число «часов» одинаково.

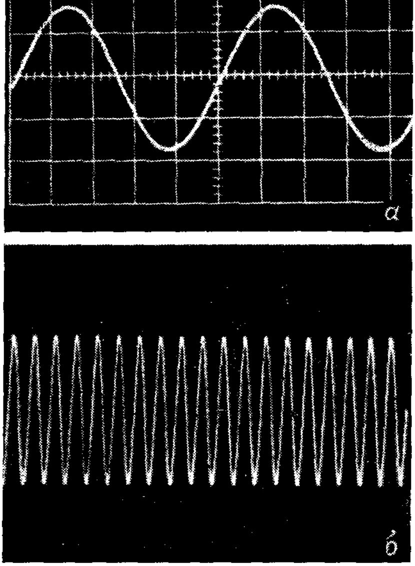
Теперь можно утверждать, что «час» и «сутки» имеют регулярную периодичность, т. е. отмечают последовательные равные интервалы времени, хотя нами и *не доказано*, что каждый из процессов действительно периодичен. Нас могут спросить: а вдруг есть некое всемогущее существо, которое замедляет течение песка ночью и убыстряет днем? Наш эксперимент, конечно, не может дать ответа на такого рода вопросы. Очевидно лишь то, что периодичность одного процесса согласуется с периодичностью другого. Поэтому при *определении* понятия «время» мы просто будем исходить из повторения некоторых очевидно периодических событий.

§ 3. *Короткие времена*

Заметим, что в процессе проверки «воспроизводимости» дней мы нашли метод измерения *части* дня, т. е. метод измерения меньших промежутков времени. Нельзя ли этот процесс продолжить и научиться измерять еще меньшие промежутки времени?

Галилей предположил, что каждый маятник отклоняется и возвращается назад за равные интервалы времени (если отклонения невелики). Сравнение числа отклонений маятника с «часом» показывает, что это действительно так. Таким способом можно измерять доли «часа». Если для подсчета числа колебаний маятника применить механический счетчик, то мы получим маятниковые часы наших дедов.

Договоримся теперь, что если маятник отклонится 3600 раз в час (и если в сутках 24 часа), то период колебаний такого



Фиг. 5.2. Две осциллограммы, снятые с экрана осциллографа.

а — при осциллографе, подключенном к одному осциллятору; б — при осциллографе, подключенном к осциллятору, период колебаний которого в десять раз меньше первого.

маятника мы назовем «секундой». Итак, нашу первоначальную единицу «сутки» мы разделили приблизительно на 10^5 частей. Используя тот же принцип сравнения, можно и секунду разделить на все меньшие и меньшие части. Для этого оказывается более удобным использовать не простой механический, а *электрический* маятник, называемый осциллятором, период колебаний которого может быть очень малым. В таких электронных осцилляторах роль маятника выполняет электрический ток, который течет то в одном, то в другом направлении.

Давайте представим себе целый ряд таких осцилляторов, что период колебаний каждого последующего в десять раз меньше предыдущего. Это можно проверить путем простого подсчета числа колебаний последующего осциллятора за одно колебание предыдущего; только теперь этот подсчет трудно провести без устройства, расширяющего возможности наблюдения, своеобразного «микроскопа времени». Таким устройством может служить электронно-лучевой осциллограф, на светящемся экране которого строится график зависимости электрического тока (или напряжения) от времени.

Соединяя осциллограф сначала с одним осциллятором, а затем с другим, мы получим на экране графики зависимости тока от времени в одном и в другом осцилляторе (фиг. 5.2). А теперь нетрудно подсчитать, какое число периодов «быстрого» осциллятора укладывается в одном периоде «медленного».

Современная электроника позволяет создавать осцилляторы с периодами 10^{-12} *сек*, которые выверяются (калибруются) методом сравнения, подобным вышеописанному, на стандартную единицу времени — секунду. В последние несколько лет в связи с изобретением и усовершенствованием «лазера», или усилителя света, появилась возможность сделать осцилляторы с еще более коротким периодом. Пока еще невозможно калибровать их тем же методом, однако, несомненно, что и это скоро будет достигнуто.

Можно измерять промежутки времени, гораздо более короткие, чем 10^{-12} *сек*, но для этого используются совершенно другие методы. В сущности используется другое *определение* понятия «время». Один из таких методов — это измерение *расстояния* между двумя событиями, происходящими на движущемся объекте. Например, пусть в движущемся автомобиле сначала включают, а затем выключают фары. Если известно, *где* были включены и выключены фары и какова была скорость автомобиля, то можно вычислить, сколько времени они горели. Для этого нужно *расстояние*, на протяжении которого горели фары, разделить на скорость автомобиля.

Именно таким методом в последние годы измерялось время жизни π^0-мезона. При наблюдении в микроскоп мельчайших следов, оставленных на фотоэмульсии, в которой родился π^0-мезон, было обнаружено следующее: π^0-мезон, двигаясь со скоростью, близкой к скорости света, прежде чем распасться, проходит в среднем расстояние около 10^{-7} *м*. Таким образом, время жизни π^0-мезона составляет всего лишь 10^{-16} *сек*! Необходимо подчеркнуть, что здесь было использовано несколько другое определение понятия «время», но, поскольку оно не приводит к каким-либо противоречиям, можно быть уверенным в том, что эти определения в достаточной мере эквивалентны друг другу.

Развивая технику эксперимента, а если необходимо, меняя определение понятия «время», можно обнаружить еще более быстрые физические процессы. Мы, например, можем говорить о периоде вибраций ядра или о времени жизни недавно обнаруженных «странных» резонансов (частиц), которые уже упоминались в гл. 2. Время жизни этих частиц лишь ненамного больше 10^{-24} *сек*! Приблизительно столько времени требуется свету (который имеет наибольшую скорость распространения), чтобы пройти расстояние, равное диаметру ядра водорода (наименьший из известных объектов).

Что можно сказать о еще более коротких интервалах времени? Имеет ли смысл вообще говорить о них, если невозможно не только измерить, но даже разумно судить о процессах, происходящих в течение столь коротких интервалов? Возможно, нет. Это один из тех вопросов, на которые нет ответа. Может быть, кому-нибудь из вас посчастливится ответить на него в ближайшие 20—30 лет.

§ 4. Большие времена

Рассмотрим теперь промежутки времени, бóльшие «суток». Измерять большие времена легко: нужно просто считать дни, пока не придумаем что-нибудь лучшего. Первое, с чем мы сталкиваемся, это год — вторая естественная периодичность, состоящая приблизительно из 365 дней. Интересно, что в природе существуют естественные счетчики лет в виде годовых колец у деревьев или отложений речного ила. В некоторых случаях можно использовать эти естественные счетчики для определения времени, отделяющего нас от какого-либо отдаленного события в прошлом.

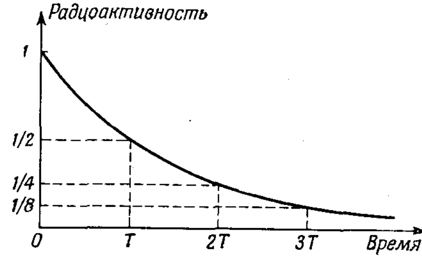
Но, когда невозможно считать годы для очень больших отрезков времени, нужно искать какие-то другие способы измерения. Одним из наиболее эффективных методов является использование в качестве «часов» радиоактивного вещества. Здесь мы сталкиваемся с «регулярностью» иного рода, чем в случае, скажем, маятника. Радиоактивность любого вещества для последовательных равных *интервалов* времени изменяется в одно

ТАБЛИЦА ВРЕМЕН

Годы	Секунды		Период полураспада
		? ? ? ?	
	10^{18}	Возраст Вселенной	
		Возраст Земли	U^{238}
10^{9}			
	10^{15}		
		Первый человек	
10^{6}			
	10^{12}	Возраст пирамид	
			Ra^{226}
10^{3}			
		Возраст США	
	10^{9}	Человеческая жизнь	H^{3}
1			
	10^{6}		
		Сутки	
	10^{3}	Свет проходит расстояние от Солнца до Земли	Нейтрон
	1	Один удар сердца	
	10^{-3}	Период звуковой волны	
	10^{-6}	Период радиоволны	μ-мезон
			$\pi^{\pm}$-мезон
	10^{-9}	Свет проходит расстояние 1 *м*	
	10^{-12}	Период молекулярных вращений	
	10^{-15}	Период атомных колебаний	
			π^{0}-мезон
	10^{-18}	Свет проходит через атом	
	10^{-21}		
		Период ядерных колебаний	
	10^{-24}	Свет проходит через ядро	Странные частицы
		? ? ? ?	

Фиг. 5.3. *Уменьшение радиоактивности со временем.*

Радиоактивность падает в два раза за каждый период полураспада Т.



и то же число раз. Если начертить график зависимости радиоактивности от времени, то мы получим кривую типа изображенной на фиг. 5.3. Мы видим, что если радиоактивность за T дней (период полураспада) уменьшается вдвое, то за $2T$ дней она уменьшится в четыре раза и т. д. Произвольный интервал времени t содержит t/T «периодов полураспада», и, следовательно, количество начального вещества уменьшится в $2^{t/T}$ раза.

Если мы знаем, что какой-то материал, например дерево, при своем образовании содержал некоторое количество A радиоактивного вещества, а прямые измерения показывают, что теперь он содержит количество B, то возраст этого материала можно просто вычислить, решив уравнение

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{t/T}=\frac{B}{A}.$$

А такие случаи, когда мы знаем первоначальное количество радиоактивного вещества, к счастью, существуют. Известно, например, что углекислый газ в воздухе содержит малую долю радиоактивного изотопа C^{14}, период полураспада которого составляет 5000 лет. Количество его благодаря действию космических лучей постоянно пополняется взамен распавшегося. Если мы измеряем *полное* содержание углерода в каком-то предмете и знаем, что определенная доля этого углерода была первоначально радиоактивным C^{14}, то нам известно и первоначальное количество A и мы можем пользоваться приведенной выше формулой. Если же путем точных измерений установлено, что оставшееся количество C^{14} соответствует 20 периодам полураспада, то можно сказать, что этот органический предмет жил приблизительно 100 000 лет назад.

Хотелось бы, однако, узнать возраст еще более древних вещей. Это можно сделать, измерив содержание других радиоактивных элементов с большими периодами полураспада. Уран, например, имеет изотоп с периодом полураспада около 10^9 лет, так что если какой-то материал при своем образовании 10^9 лет назад содержал уран, то сегодня от него осталась только половина первоначального количества. При своем распаде уран превращается в свинец. Как определить возраст горной породы, которая образовалась много-много лет назад в результате какого-то химического процесса? Свинец по своим химическим свойствам отличается от урана, поэтому они первоначально входили в разные виды горных пород. Если взять такой вид породы, который вначале должен был содержать только уран, то мы обнаружим в нем некоторое количество свинца. Сравнивая доли свинца и урана, можно определить ту часть урана, которая в результате распада превратилась в свинец. Этим методом было установлено, что возраст некоторых горных пород составляет несколько миллиардов лет. Применяя шире этот метод путем сравнения содержания урана и свинца не только в некоторых горных породах, но и в воде океанов, а затем усредняя различные данные по всему земному шару, установили, что нашей планете исполнилось примерно 5,5 миллиарда лет.

Интересно, что возраст метеоритов, падающих на Землю, вычисленный по урановому методу, совпадает с возрастом самой Земли. Более того, оказалось, что и метеориты, и горные породы Земли составлены из одного и того же материала, поэтому существует мнение, что Земля образовалась из пород, «плававших» некогда в «околосолнечном» пространстве.

Некогда, во времена, еще более древние, чем возраст Земли (т. е. 5 миллиардов лет назад), начала свою историю Вселенная. Сейчас считают, что возраст по крайней мере нашей части Вселенной достигает примерно 10—12 миллиардов лет. Нам неизвестно, что́ было до этого. В сущности опять можно спросить: «А есть ли смысл говорить о том, что было до этого? И имеет ли смысл само понятие «время» до «рождения» Вселенной?»

§ 5. *Единицы и стандарты времени*

Мы уже говорили, что счет времени удобно вести в каких-то стандартных единицах, скажем в днях или секундах, и измерять длительности в количествах этой единицы или ее долях. Но что же выбрать за основную стандартную единицу? Можно ли, например, принять за отправную единицу человеческий пульс? Очевидно, нет. Уж очень непостоянна эта единица. Лучше обстоит дело с часами. Двое часов согласуются гораздо лучше, чем пульс. Вы скажете: ладно, давайте возьмем часы. Но чьи? Существует предание об одном швейцарском мальчике, которому хотелось, чтобы все часы в его городе отзванивали полдень в одно и то же время. Он ходил по городу и доказывал всем, насколько это важно. Каждый считал, что это действительно было бы чудесно, если бы все другие часы в городе звонили полдень по *его* часам! В самом деле, очень трудно решить, чьи же часы мы должны выбрать в качестве стандарта. К счастью, существуют часы, которые признают все,— это наша Земля. Долгое время в качестве стандарта выбирался период вращения Земли. Однако по мере того, как измерения становились все более точными, обнаруживалось, что вращение Земли не строго периодично, если сравнивать его с лучшими часами. А этим «лучшим часам» можно доверять, ибо они согласуются друг с другом. Сейчас известно, что по разным причинам одни дни оказываются длиннее других и, кроме того, средний период вращения Земли на протяжении столетий несколько удлиняется.

Вплоть до самого последнего времени не было найдено ничего более точного, чем вращение Земли, и поэтому все часы сверялись с длиной астрономических суток, а секунда определялась как 1/86 400 часть средних суток. Однако сейчас мы научились работать с некоторыми естественными осцилляторами, которые являются более точными стандартами времени, чем вращение Земли. Это так называемые «атомные часы». В основе их лежат колебания атомов, период которых нечувствителен к температуре и другим внешним воздействиям. Эти часы позволяют измерять время с точностью, лучшей 10^{-7}%. В последние два года профессор Гарвардского университета Норман Рамзей спроектировал и построил улучшенные атомные часы, работающие на колебаниях атомов водорода. Он считает, что эти часы могут быть еще в сто раз более точными. Сейчас ведутся измерения, которые покажут, насколько он прав.

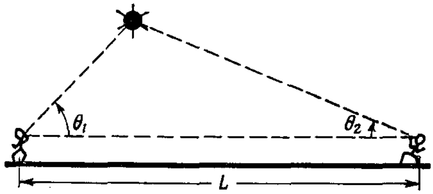
А поскольку оказалось возможным создать часы гораздо более точные, чем астрономические, то ученые договариваются определять единицу времени с помощью новых стандартов — атомных часов *.

§ 6. *Большие расстояния*

Вернемся теперь к вопросу о *расстоянии*. Как далеко отстоят от нас окружающие предметы и как велики они? Всем известно, что для измерения расстояния нужно взять какую-то единицу длины и считать, сколько этих единиц укладывается на данном отрезке. Но как измерить те предметы, которые меньше единицы длины? Как подразделить выбранную единицу длины? А точно так же, как и время: мы берем меньшую единицу длины и считаем, сколько таких единиц укладывается в большей. Таким методом мы сможем измерять все меньшие и меньшие длины.

Однако под расстоянием мы понимаем не только то, что можно измерить метром. Как, например, измерить метром расстояние между вершинами двух гор? Здесь на помощь приходит уже

* Об этом ученые договорились в конце 1964 г., когда готовилось русское издание этой книги.— *Прим. ред.*



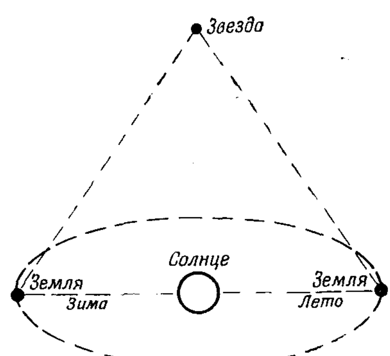
Фиг. 5.4. Определение высоты искусственного спутника методом триангуляции.

другой метод измерения расстояний — триангуляция. Хотя это означает использование другого определения понятия «расстояние», но в тех случаях, когда есть возможность применить оба метода, они дают одинаковый результат. Пространство все же более или менее соответствует представлениям Евклида, поэтому оба определения эквивалентны. Ну, а раз они согласуются на Земле, то мы более уверены в законности применения триангуляции и для больших расстояний. Этим методом была измерена, например, высота первого спутника (фиг. 5.4). Она оказалась равной приблизительно $5 \cdot 10^5$ *м*. При большей тщательности измерений тем же самым методом определялось расстояние до Луны. Направления двух телескопов в различных точках Земли дают два необходимых угла. Оказалось, что Луна удалена от нас на расстояние $4 \cdot 10^8$ *м*. Однако для Солнца таких измерений провести нельзя, по крайней мере до сих пор никому не удавалось. Дело в том, что точность, с которой можно сфокусировать телескоп на данную точку Солнца и с которой можно измерить углы, не достаточна для вычисления расстояния до Солнца. Как же все-таки определить его? Необходимо как-то расширить принцип триангуляции. Астрономические наблюдения позволяют измерить *относительное* расстояние между планетами и Солнцем и определить их относительное расположение. Таким образом, мы получаем план солнечной системы в неизвестном масштабе. Чтобы определить масштаб, требуется только *абсолютное* расстояние, которое было найдено многими различными способами. Один из способов, считавшийся до самого последнего времени наиболее точным, заключается в определении расстояния от Земли до Эроса — малой планеты, которая по временам проходит недалеко от Земли. С помощью триангуляции можно определить расстояние до этого небольшого объекта и получить необходимый масштаб. Зная относительные расстояния, можно определить, например, все абсолютные расстояния от Земли до Солнца или до планеты Плутон.

В последний год достигнуты большие успехи в определении масштаба солнечной системы. В Лаборатории ракетных двигателей с помощью прямой радиолокационной связи были проведены очень точные измерения расстояния от Земли до Венеры. Здесь мы имеем дело еще с одним определением понятия «расстояние». Нам известна скорость распространения света (а стало быть, и скорость распространения радиоволн), и мы предполагаем, что эта скорость постоянна на всем протяжении между Землей и Венерой. Послав радиоволну по направлению к Венере, мы считаем время до прихода обратно отраженной волны. А зная *время* и *скорость*, мы получаем *расстояние*.

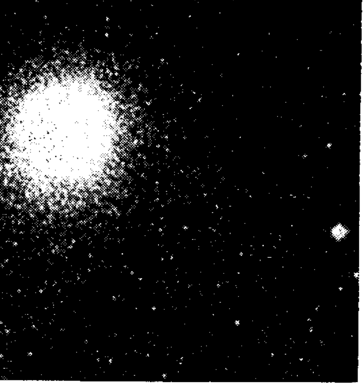
А как измерить расстояние до еще более отдаленных объектов, например до звезд? К счастью, здесь снова можно возвратиться к нашему методу триангуляции, ибо движение Земли вокруг Солнца позволяет измерить расстояние до объектов, находящихся вне солнечной системы. Если мы направим телескоп на некую звезду один раз зимой, а другой раз летом (фиг. 5.5), то можно надеяться достаточно точно измерить углы и определить расстояние до этой звезды.

Но что делать, если звезда находится настолько далеко от нас, что уже невозможно пользоваться методом триангуляции? Астрономы всегда изобретают все новые и новые способы определения расстояний. Так, они научились определять размер и яркость звезд по их цвету. Оказалось, что цвет и истинная яркость многих близлежащих звезд, расстояние до которых определялось методом триангуляции, в большинстве случаев связаны между собой гладкой зависимостью. Если теперь измерить цвет отдаленной звезды, то по этой зависимости можно определить ее истинную яркость, а измеряя *видимую яркость* звезды (вернее, по тому, насколько звезда нам кажется *тусклой*), можно вычислить расстояние до нее. (Для данной истинной яркости видимая яркость уменьшается как квадрат расстояния.) Правильность этого метода нашла неожиданное подтверждение в результатах измерений, проведенных для группы звезд, известных под названием «шарового скопления». Фотография этой группы звезд приведена на фиг. 5.6. Достаточно взглянуть на фотографию, чтобы убедиться, что все эти звезды расположены в одном месте. Тот же результат получается и с помощью метода сравнения цвета и яркости.



Фиг. 5.5. Определение расстояния до ближайшей звезды методом триангуляции.

В качестве базы используется диаметр орбиты Земли.



Фиг. 5.6. Скопление звезд вблизи центра нашей Галактики, удаленное от нас на расстояние 30 000 световых лет, или около $3 \cdot 10^{20}$ м.

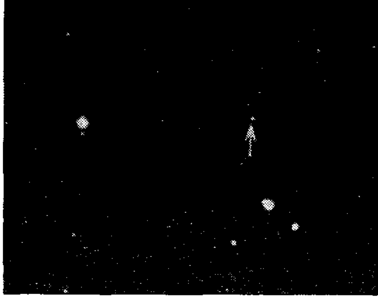
Изучение многих шаровых скоплений дает еще одну важную информацию. Оказалось, что существует участок неба с большой концентрацией таких шаровых скоплений, причем большинство из них находится на одном и том же расстоянии от нас. Сравнивая эти данные с некоторыми другими, мы приходим к заключению, что эти скопления являются центром нашей Галактики. Таким образом мы определяем, что расстояние до центра Галактики составляет приблизительно 10^{20} *м*.

Данные о размере нашей Галактики дают ключ к определению еще больших межгалактических расстояний. На фиг. 5.7 приведена фотография галактики, которая по форме очень похожа на нашу Галактику. Возможно, что и размер ее тот же. (Есть еще ряд соображений, согласно которым размеры всех галактик приблизительно одинаковы.) А если это так, то можно узнать расстояние до нее. Мы измеряем угловой размер галактики (т. е. угол, который она занимает на небесном своде), знаем ее диаметр, а стало быть, можем вычислить расстояние. Опять триангуляция!

Недавно с помощью гигантского Паломарского телескопа были получены фотографии неимоверно далеких галактик. Одна

Фиг. 5.7. Спиральная галактика, подобная нашей.

Если предположить, что диаметр этой галактики равен диаметру нашей Галактики, то, исходя из ее кажущегося размера, можно подсчитать расстояние; оно оказывается равным 30 миллионам световых лет ($3 \cdot 10^{23}$ м).



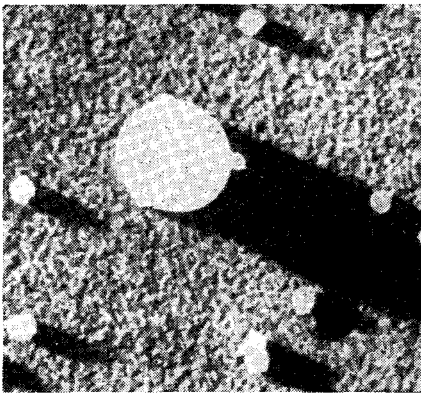
Фиг. 5.8. Наиболее удаленный от нас объект 3С295 в созвездии Волопаса (указан стрелкой), который измерялся в 1960 г. с помощью 200-дюймового телескопа.

из этих фотографий приведена на фиг. 5.8. Сейчас полагают, что расстояние до некоторых из них приблизительно равно половине размера Вселенной (10^{26} *м*) — наибольшего расстояния, которое можно себе представить!

§ 7. Малые расстояния

Обратимся теперь к малым расстояниям. Подразделить метр просто. Без особых трудностей можно разделить его на тысячу равных частей. Таким же путем, хотя и несколько сложнее (используя хороший микроскоп), можно разделить миллиметр на тысячу частей и получить микрон (миллионную долю метра). Однако продолжать это деление становится трудно, поскольку невозможно «увидеть» объекты, меньшие, чем длина волны видимого света (около $5 \cdot 10^{-7}$ *м*).

Все же мы не останавливаемся на том, что недоступно глазу. С помощью электронного микроскопа можно получить фотографии, помогающие увидеть и измерить еще меньшие объекты — вплоть до 10^{-8} *м* (фиг. 5.9). А с помощью косвенных измерений (своего рода триангуляции в микроскопическом масштабе) можно измерять все меньшие и меньшие объекты. Сначала из наблюдений отражения света короткой длины волны (рентгеновских



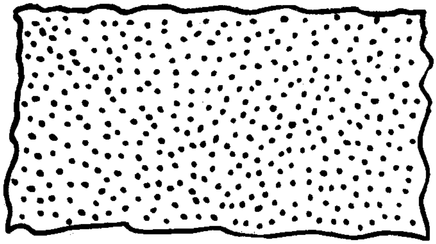
Фиг. 5.9. Фотография вирусов, полученная с помощью электронного микроскопа.

Видна «большая» сфера, показанная для сравнения: диаметр ее равен $2 \cdot 10^{-7}$ м, или 2000 Å.

ТАБЛИЦА РАССТОЯНИЙ Световые годы	Метры	
		? ? ? ?
	10^{27}	
		Размеры Вселенной
10^9		
	10^{24}	
10^6		До ближайшей соседней галактики
	10^{21}	
		До центра нашей Галактики
10^3		
	10^{18}	
		До ближайшей звезды
1		
	10^{15}	
		Радиус орбиты Плутона
	10^{12}	
		До Солнца
	10^9	
		До Луны
	10^6	
		Высота искусственного спутника
	10^3	
		Высота телевизионной башни
	1	Рост ребенка
	10^{-3}	
		Крупинка соли
	10^{-6}	
		Размер вируса
	10^{-9}	
		Радиус атома
	10^{-12}	
	10^{-15}	Радиус ядра
		? ? ? ?

лучей) от образца с нанесенными на известном расстоянии метками измеряется длина волны световых колебаний. Затем по картине рассеяния того же света на кристалле можно определить относительное расположение в нем атомов, причем результат хорошо согласуется с данными о расположении атомов, полученными химическим путем. Таким способом определяется диаметр атомов (около 10^{-10} *м*).

Дальше в шкале расстояний имеется довольно большая незаполненная «щель» между атомными размерами 10^{-10} *м* и в 10^5 раз



Фиг. 5.10. Воображаемая пластинка углерода толщиной 1 см при сильном увеличении (если бы были видны только ядра атомов).

меньшими ядерными размерами (около 10^{-15} *м*). Для определения ядерных размеров применяются уже совершенно другие методы: измеряется *видимая площадь* σ, или так называемое *эффективное поперечное сечение*. Если же мы хотим определить радиус, то пользуемся формулой $\sigma = \pi r^2$, поскольку ядра можно приближенно рассматривать как сферические.

Эффективные сечения ядер можно определить, пропуская пучок частиц высокой энергии через тонкую пластинку вещества и измеряя число частиц, не прошедших сквозь нее. Эти высокоэнергетические частицы прорываются сквозь легкое облачко электронов, но при попадании в тяжелое ядро останавливаются или отклоняются. Предположим, что у нас имеется пластинка толщиной 1 *см*. На такой толщине укладывается приблизительно 10^8 атомных слоев. Однако ядра настолько малы, что вероятность того, что одно ядро закроет другое, очень незначительна. Можно себе представить, что высокоэнергетическая частица, налетающая на пластинку углерода толщиной 1 *см*, «видит» приблизительно то, что в сильно увеличенном масштабе показано на фиг. 5.10.

Вероятность того, что очень малая частица столкнется с ядром, равна отношению площади, занимаемой ядрами (черные точки), к общей площади рисунка. Пусть над областью с площадью A по всей толщине пластинки находится N атомов (разумеется, каждый с одним ядром). Тогда доля площади, закрытая ядрами, будет равна $N\sigma/A$. Пусть теперь число частиц в нашем пучке до пластинки будет равно n_1, а после нее равно n_2; тогда доля частиц, *не* прошедших через пластинку, будет $(n_1 - n_2)/n_1$, что должно быть равно доле площади, занимаемой ядрами. Радиус же ядер вычисляется из равенства *

$$\pi r^2 = \sigma = \frac{A}{N} \frac{n_1 - n_2}{n_1}.$$

* Это равенство справедливо только тогда, когда площадь, занимаемая ядрами, составляет малую долю общей площади, т. е. $(n_1 - n_2)/n_1$ много меньше единицы. В противном же случае необходимо учитывать поправку на частичное «загораживание» одного ядра другим.

Из таких экспериментов мы находим, что радиусы ядер лежат в пределах от $1 \cdot 10^{-15}$ до $6 \cdot 10^{-15}$ *м*. Кстати, единица длины 10^{-15} *м* называется *ферми* в честь Энрико Ферми (1901—1958).

Что можно ожидать в области еще меньших расстояний? Можно ли их измерять? На этот вопрос пока еще нет ответа. Может быть, именно здесь, в каком-то изменении понятия пространства или измерения на малых расстояниях, кроется разгадка тайны ядерных сил.

Несколько слов о стандарте длины. Разумно в качестве стандарта использовать какую-то естественную единицу длины, например радиус Земли или некоторую его долю. Именно таким образом возник метр. Первоначально он определялся как $(\pi/2) \cdot 10^{-7}$ доля радиуса Земли. Однако такое определение нельзя считать ни особенно точным, ни удобным. Поэтому в течение долгого времени по международному соглашению в качестве эталона метра принималась длина между двумя метками, сделанными на особом брусе, который хранится в специальной лаборатории во Франции. Только много позднее поняли, что и такое определение метра не столь уж точно, как это необходимо, и не так уж универсально и постоянно, как этого хотелось бы. Поэтому сейчас принят новый стандарт длины как некоторое заранее установленное число длин волн определенной спектральной линии.

• • •

Результаты измерения расстояний и времени зависят от наблюдателя. Два наблюдателя, движущиеся друг относительно друга, измеряя один и тот же предмет или длительность одного и того же процесса, получат разные значения, хотя, казалось бы, мерили одно и то же. Расстояния и интервалы времени в зависимости от системы координат (т. е. системы отсчета), в которой производят измерения, имеют различную величину. В последующих главах мы будем более подробно разбирать этот вопрос.

Законы природы не позволяют выполнять абсолютно точные измерения расстояний или интервалов времени. Мы уже упоминали ранее, что ошибка в определении положения предмета не может быть меньше, чем

$$\Delta x = \frac{h}{\Delta p},$$

где h — малая величина, называемая «постоянной Планка», а Δp — ошибка в измерении импульса (массы, умноженной на скорость) этого предмета. Как уже говорилось, эта неопределенность в измерении положения связана с волновой природой частиц.

Относительность пространства и времени приводит к тому, что измерения интервалов времени также не могут быть точнее, чем

$$\Delta t = \frac{h}{\Delta E},$$

где ΔE — ошибка в измерении энергии того процесса, продолжительностью которого мы интересуемся. Чтобы знать *более точно, когда* что-то произошло, мы вынуждены довольствоваться тем, что меньше знаем, *что́ же именно* произошло, поскольку наши знания об энергии, участвующей в процессе, будут менее точными. Эта неопределенность времени, так же как и неопределенность положения, связана с волновой природой вещества.

Глава 6

ВЕРОЯТНОСТЬ

Истинная логика нашего мира — это подсчет вероятностей.

Джемс Кларк Максвелл

§ 1. *Вероятность и правдоподобие*

«Вероятность», или «шанс»,— это слово вы слышите почти ежедневно. Вот по радио передают прогноз погоды на завтра: «Вероятно, будет дождь». Вы можете сказать: «У меня мало шансов дожить до ста лет». Ученые тоже часто употребляют эти слова. Сейсмолога интересует вопрос: какова вероятность того, что в следующем году в Южной Калифорнии произойдет землетрясение такой-то силы? Физик может спросить: с какой вероятностью этот счетчик Гейгера зарегистрирует двадцать импульсов в последующие десять секунд? Дипломата или государственного деятеля волнует вопрос: каковы шансы этого кандидата быть избранным президентом? Ну, а вас, конечно, интересует: есть ли шансы что-либо понять в этой главе?

Под *вероятностью* мы понимаем что-то вроде предположения или догадки. Но почему и когда мы гадаем? Это делается тогда, когда мы хотим вынести какое-то заключение или вывод, но не имеем достаточно информации или знаний, чтобы сделать вполне определенное заключение. Вот и приходится гадать: может быть, так, а может быть, и не так, но больше похоже на то, что именно так. Очень часто мы гадаем, когда нужно принять какое-то решение, например: «Брать ли мне сегодня с собой плащ или не стоит?» «На какую силу землетрясения должен я рассчитывать проектируемое здание?» «Нужно ли мне делать более надежную защиту?» «Следует ли мне менять свою позицию в предстоящих международных переговорах?» «Идти ли мне сегодня на лекцию?»

Иногда мы строим догадки потому, что хотим при ограниченности своих знаний сказать как можно *больше* о данной ситуации. В сущности ведь любое обобщение носит характер догадки. Любая физическая теория — это своего рода догадка. Но догадки тоже бывают разные: хорошие и плохие, близкие и далекие. Тому, как делать наилучшие догадки, учит нас теория вероятностей. Язык вероятностей позволяет нам количественно говорить о таких ситуациях, когда исход весьма и весьма неопределенен, но о котором все же в среднем можно что-то сказать.

Давайте рассмотрим классический пример с подбрасыванием монеты. Если монета «честная», то мы не можем знать наверняка, какой стороной она упадет. Однако мы предчувствуем, что при большом числе бросаний число выпадений «орла» и «решки» должно быть приблизительно одинаковым. В этом случае говорят: вероятность выпадения «орла» равна половине.

Мы можем говорить о вероятности исхода только тех наблюдений, которые собираемся проделать в будущем. *Под вероятностью данного частного результата наблюдения понимается ожидаемая нами наиболее правдоподобная доля исходов с данным результатом при некотором числе повторений наблюдения.* Вообразите себе повторяющееся N раз наблюдение, например подбрасывание вверх монеты. Если N_A — *наша оценка* наиболее правдоподобного числа выпадений с результатом A, например выпадений «орла», то под вероятностью $P(A)$ результата A мы понимаем отношение

$$P(A)=\frac{N_A}{N}. \tag{6.1}$$

Наше определение требует некоторых комментариев. Прежде всего мы говорим о вероятности какого-то события только в том случае, если оно представляет собой возможный результат испытания, которое можно *повторить*. Но отнюдь не ясно, имеет ли смысл такой вопрос: какова вероятность того, что в этом доме поселилось привидение?

Вы, конечно, можете возразить, что никакая ситуация не может повториться в *точности*. Это верно. Каждое новое наблюдение должно происходить по крайней мере в другое время или в другом месте. По этому поводу я могу сказать только одно: необходимо, чтобы каждое «повторное» наблюдение казалось нам *эквивалентным*. Мы должны предполагать по крайней мере, что каждый новый результат наблюдения возник из равноценных начальных условий и из одного и того же уровня начальных знаний. Последнее особенно важно. (Если вы заглянули в карты противника, то, конечно, ваши прогнозы о шансах на выигрыш будут совсем другими, чем если бы вы играли честно!)

Хочу отметить, что я *не собираюсь* рассматривать значения N и N_A в (6.1) только как результат каких-то действительных наблюдений. Число N_A — это просто наилучшая *оценка* того, что *могло бы* произойти при *воображаемых* наблюдениях. Поэтому вероятность зависит от наших знаний и способностей быть пророком, в сущности от нашего здравого смысла! К счастью, здравый смысл не столь уже субъективен, как это кажется на первый взгляд. Здравым смыслом обладают многие люди, и их суждения о степени правдоподобия того или иного события в большинстве случаев совпадают. Однако вероятность все же не является «абсолютным» числом. Поскольку в каком-то смысле она зависит от степени нашего невежества, постольку с изменением наших знаний она может меняться.

Отмечу еще одну «субъективную» сторону нашего определения вероятности. Мы говорили, что N_A — это «наша оценка наиболее вероятного числа случаев». При этом, конечно, мы не надеялись, что число нужных нам случаев будет *в точности* равно N_A, но оно должно быть где-то *близко* к N_A; это число *более вероятно*, чем любое другое. Если подбрасывать монету вверх 30 раз, то вряд ли можно ожидать, что число выпадений «орла» будет в точности 15; скорее это будет какое-то число около 15, может быть 12, 13, 14, 15, 16 или 17. Однако если *необходимо* выбрать из этих чисел какое-то одно число, то мы бы решили, что число 15 *наиболее правдоподобно*. Поэтому мы и пишем, что P (орел) $= 0{,}5$.

Но почему все же число 15 более правдоподобно, чем все остальные? Можно рассуждать следующим образом: если наиболее вероятное число выпадений «орла» будет $N_{\text{О}}$, а полное число подбрасываний N, то наиболее вероятное число выпадений «решек» равно $N - N_{\text{О}}$. (Ведь предполагается, что при каждом подбрасывании должны выпасть только *либо* «орел», *либо* «решка» и ничего другого!) Но если монета «честная», то нет основания думать, что число выпадений «орла», например, должно быть больше, чем выпадений «решки»? Так что до тех пор, пока у нас нет оснований сомневаться в честности подбрасывающего, мы должны считать, что $N_{\text{Р}} = N_{\text{О}}$, а следовательно, $N_{\text{Р}} = N_{\text{О}} = N/2$, или P(орел) $= P$(решка) $= 0{,}5$.

Наши рассуждения можно обобщить на *любую* ситуацию, в которой возможны m различных, но «равноценных» (т. е. равновероятных) результатов наблюдения. Если наблюдение может привести к m различным результатам и ни к чему больше и если у нас нет оснований думать, что один из результатов предпочтительнее остальных, то вероятность каждого *частного* исхода наблюдения A будет $1/m$, т. е. $P(A) = 1/m$.

Пусть, например, в закрытом ящике находятся семь шаров разного цвета и мы наугад, т. е. не глядя, берем один из них. Вероятность того, что у нас в руке окажется красный шар, равна 1/7. Вероятность того, что мы из колоды в 36 карт вытащим даму пик, равна 1/36, такая же, как и выпадение двух шестерок при бросании двух игральных костей.

• • •

В гл. 5 мы определяли размер ядра с помощью затеняемой им площади или так называемого эффективного сечения. По существу речь шла о вероятностях. Если мы «обстреливаем» быстрыми частицами тонкую пластинку вещества, то имеется некая вероятность, что они пройдут через нее, не задев ядер, однако с некоторой вероятностью они могут попасть в ядро. (Ведь ядра столь малы, что мы не можем *видеть* их, мы, следовательно, не можем прицелиться, и «стрельба» ведется вслепую.) Если в нашей пластинке имеется n атомов и ядро каждого из них затеняет площадь σ, то полная площадь, затененная ядрами, будет равна $n\sigma$. При большом числе N случайных выстрелов мы ожидаем, что число попаданий N_C будет так относиться к *полному* числу выстрелов, как затененная ядрами площадь относится к полной площади пластинки:

$$\frac{N_C}{N}=\frac{n\sigma}{A}. \tag{6.2}$$

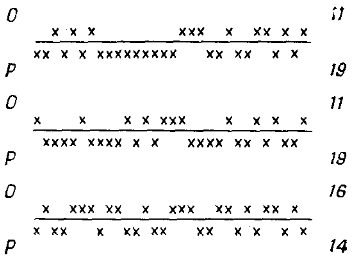
Поэтому можно сказать, что *вероятность* попадания каждой из выстреленных частиц в ядро при прохождении сквозь пластинку будет равна

$$P_C=\frac{n}{A}\sigma, \tag{6.3}$$

где n/A — просто число атомов, приходящихся на единицу площади пластинки.

§ 2. *Флуктуации*

Теперь мне бы хотелось несколько подробнее показать, как можно использовать идею вероятности, чтобы ответить на вопрос: сколько же в самом деле я *ожидаю* выпадений «орла», если подбрасываю монету N раз? Однако, прежде чем ответить на него, давайте посмотрим, что все-таки дает нам такой «эксперимент». На фиг. 6.1 показаны результаты, полученные в первых трех сериях испытаний по 30 испытаний в каждой. Последовательности выпадений «орла» и «решки» показаны в том порядке, как это происходило. В первый раз получилось 11 выпадений «орла», во второй — тоже 11, а в третий — 16. Можно ли на этом основании подозревать, что монета была «нечестной»? Или, может быть, мы ошиблись, приняв 15 за наиболее вероятное число выпадений «орла» в каждой серии испытаний?



Фиг. 6.1. Последовательность выпадения «орла» и «решки».

Три серии опытов подбрасывания монеты по 30 раз в каждой серии.

Сделаем еще 97 серий, т. е. 100 серий по 30 испытаний в каждой. Результаты их приведены в табл. 6.1 *.

Таблица 6.1 ● ЧИСЛО ВЫПАДЕНИЙ «ОРЛА»

Проведено несколько серий испытаний, по 30 подбрасываний монеты в каждой

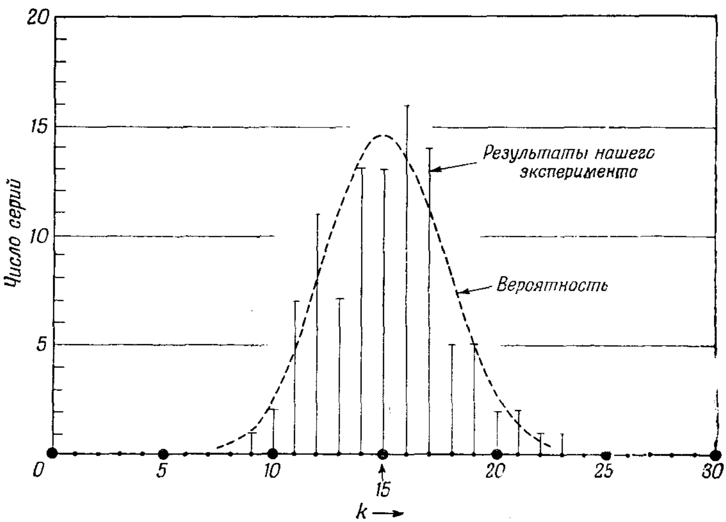
11	16	17	15	17	16	19	18	15	13
11	17	17	12	20	23	11	16	17	14
16	12	15	10	18	17	13	15	14	15
16	12	11	22	12	20	12	15	16	12
16	10	15	13	14	16	15	16	13	18
14	14	13	16	15	19	21	14	12	15
16	11	16	14	17	14	11	16	17	16
19	15	14	12	18	15	14	21	11	16
17	17	12	13	14	17	9	13	16	13

Взгляните на числа, приведенные в этой таблице. Вы видите, что большинство результатов «близки» к 15, так как почти все они расположены между 12 и 18. Чтобы лучше прочувствовать эти результаты, нарисуем график их *распределения*. Для этого подсчитаем число испытаний, в которых получилось k выпадений «орла», и отложим это число вверх над k. В результате получим фиг. 6.2. Действительно, в 13 сериях было получено 15 выпадений «орла», то же число серий дало 14 выпадений «орла»; 16 и 17 выпадений получались *больше* чем 13 раз. Должны ли мы из этого делать вывод, что монетам больше нравится ложиться «орлом» вверх? А может быть, мы неправы в выборе числа 15 как наиболее правдоподобного? Может быть, в действительности более правдоподобно, что за 30 испытаний получается 16 выпадений «орла»? Минуточку терпения! Если мы сложим вместе результаты всех серий, то общее число испытаний

* Эти последние 97 экспериментов проводились следующим образом. Ящик, в котором находились 30 монет, энергично встряхивался; затем подсчитывалось число выпадений «орла».

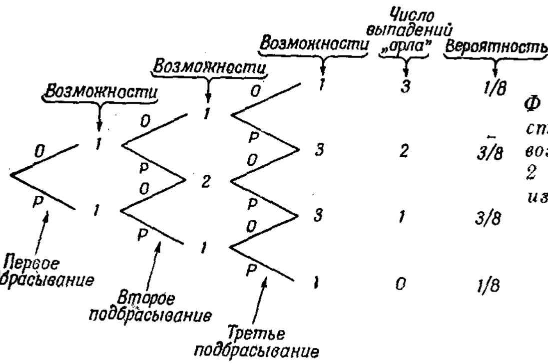
будет 3000, а общее число выпадений «орла» в этих испытаниях достигает 1492, так что доля испытаний с выпадением «орла» в результате будет 0,497. Это очень близко к половине, но все же несколько *меньше*. Нет, мы все-таки *не можем* предполагать, что вероятность выпадения «орла» больше, чем 0,5! Тот факт, что в отдельных испытаниях «орел» чаще выпадал 16 раз, чем 15, является просто *случайным* отклонением, или *флуктуацией*. Мы же по-прежнему ожидаем, что *наиболее правдоподобным* числом выпадений должно быть 15.

Можно спросить: а какова вероятность того, что в серии из 30 испытаний «орел» выпадет 15 раз или 16, или какое-то другое число раз? Мы говорим, что вероятность выпадения «орла» в серии из *одного* испытания равна 0,5; соответственно вероятность невыпадения тоже равна 0,5. В серии из двух испытаний возможны *четыре* исхода: ОО, ОР, РО, РР. Так как каждый из них равновероятен, то можно заключить: а) вероятность двух выпадений «орла» равна $^1/_4$; б) вероятность одного выпадения «орла» равна $^1/_4$; в) вероятность невыпадения «орла» равна $^1/_4$. Это происходит потому, что существуют *две* возможности из четырех равных получить одно выпадение «орла» и только одна возможность получить два выпадения или не получить ни одного.



Фиг. 6.2. Сводка результатов 100 серий по 30 испытаний в каждой.

Вертикальные линии показывают число серий, в которых выпадал k раз «орел». Пунктирная кривая показывает ожидаемое число серий с выпадением k раз «орла», полученное из вычисления вероятностей.



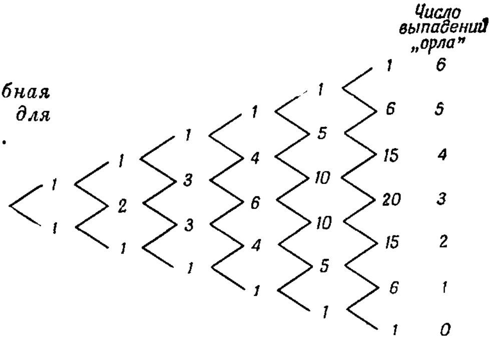
Фиг. 6.3. Диаграмма, иллюстрирующая число различных возможностей получения 0, 1, 2 и 3 выпадений «орла» в серии из трех испытаний.

Рассмотрим теперь серию из трех испытаний. Третье испытание с равной вероятностью может дать либо «орел», либо «решку», поэтому существует только один способ получения трех выпадений «орла»: мы *должны* получить два выпадения «орла» в двух первых испытаниях и затем выпадение «орла» в последнем. Однако получить два выпадения «орла» можно уже *тремя* способами: после двух выпадений «орла» может выпасть «решка» и еще два способа — после одного выпадения «орла» в первых двух испытаниях выпадет «орел» в третьем. Так что число равновероятных способов получить 3, 2, 1 и 0 выпадений «орла» будет соответственно равно 1, 3, 3 и 1; полное же число всех возможных способов равно 8. Таким образом, получаются следующие вероятности: $^1/_8$, $^3/_8$, $^3/_8$, $^1/_8$.

Эти результаты удобно записать в виде диаграммы (фиг. 6.3). Ясно, что эту диаграмму можно продолжить, если мы интересуемся еще бóльшим числом испытаний. На фиг. 6.4 приведена аналогичная диаграмма для шести испытаний. Число «способов», соответствующих каждой точке диаграммы,— это просто число различных «путей» (т. е., попросту говоря, последовательность выпадения «орла» и «решки»), которыми можно прийти в эту точку из начальной, не возвращаясь при этом назад, а высота этой точки дает общее число выпадений «орла». Этот набор чисел известен под названием *треугольника Паскаля*, а сами числа называются *биномиальными коэффициентами*, поскольку они появляются при разложении выражения $(a+b)^n$. Обычно эти числа на нашей диаграмме обозначаются символом $\binom{n}{k}$, или C_k^n (число сочетаний из n по k), где n — полное число испытаний, а k — число выпадений «орла». Отмечу попутно, что биномиальные коэффициенты можно вычислять по формуле

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}, \qquad (6.4)$$

Фиг. 6.4. Диаграмма, подобная изображенной на фиг. 6.3, для серии из шести испытаний.



где символ $n!$, называемый «n-факториалом», обозначает произведение всех целых чисел от 1 до n, т. е. $1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (n-1) \cdot n$.

Теперь уже все готово для того, чтобы с помощью выражения (6.1) подсчитать вероятность $P(k, n)$ выпадения k раз «орла» в серии из n испытаний. Полное число всех возможностей будет 2^n (поскольку в каждом испытании возможны два исхода), а число равновероятных комбинаций, в которых выпадет «орел», будет $\binom{n}{k}$, так что

$$P(k, n) = \frac{\binom{n}{k}}{2^n}. \tag{6.5}$$

Поскольку $P(k, n)$ — доля тех серий испытаний, в которых выпадение «орла» ожидается k раз, то из ста серий k выпадений «орла» ожидается $100\,P(k, n)$ раз. Пунктирная кривая на фиг. 6.2 проведена как раз через точки функции $100\,P(k, 30)$. Видите, мы *ожидали* получить 15 выпадений «орла» в 14 или 15 сериях испытаний, а получили только в 13. Мы *ожидали* получить 16 выпадений «орла» в 13 или 14 сериях испытаний, а получили в 16. Но такие флуктуации вполне допускаются «правилами игры».

Использованный здесь метод можно применять и в более общей ситуации, где в каждом единичном испытании возможны только два исхода, которые давайте обозначим через В (выигрыш) и П (проигрыш). Вообще говоря, вероятности В и П в каждом отдельном испытании могут быть разными. Пусть p, например, будет вероятностью результата В. Тогда q (вероятность результата П) должна быть равна $(1-p)$. В серии из n испытаний вероятность того, что результат В получится k раз, равна

$$P(k, n) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}. \tag{6.6}$$

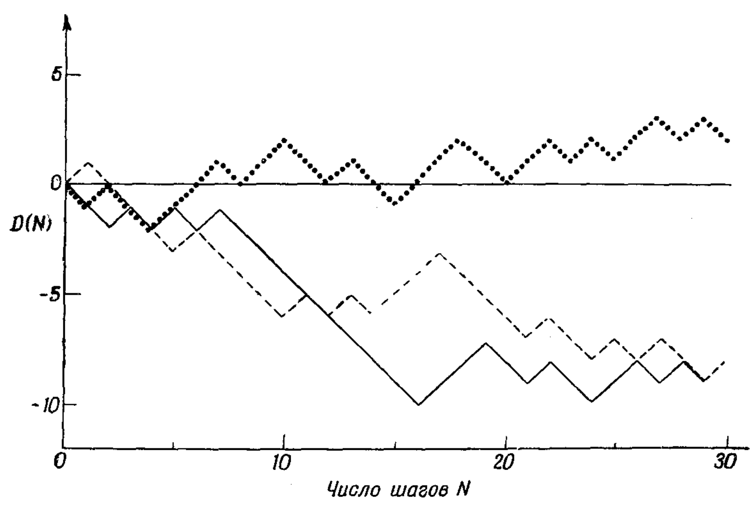
Эта функция вероятностей называется *биномиальным законом распределения вероятности*.

§ 3. *Случайные блуждания*

Существует еще одна интересная задача, при решении которой не обойтись без понятия вероятности. Это проблема «случайных блужданий». В простейшем варианте эта задача выглядит следующим образом. Вообразите себе игру, в которой игрок, начиная от точки $x = 0$, за каждый ход может продвинуться *либо* вперед (до точки x), *либо* назад (до точки $-x$), причем решение о том, куда ему идти, принимается совершенно *случайно*, ну, например, с помощью подбрасывания монеты. Как описать результат такого движения? В более общей форме эта задача описывает движение атомов (или других частиц) в газе — так называемое броуновское движение — или образование ошибки при измерениях. Вы увидите, насколько проблема «случайных блужданий» тесно связана с описанным выше опытом с подбрасыванием монеты.

Прежде всего давайте рассмотрим несколько примеров случайных блужданий. Их можно описать «чистым» продвижением D_N за N шагов. На фиг. 6.5 показаны три примера путей при случайном блуждании. (При построении их в качестве случайной последовательности решений о том, куда сделать следующий шаг, использовались результаты подбрасывания монеты, приведенные на фиг. 6.1.)

Что можно сказать о таком движении? Ну, во-первых, можно спросить: как далеко мы в среднем продвинемся? Нужно *ожидать*, что среднего продвижения вообще не будет, поскольку мы с



Фиг. 6.5. Три примера случайного блуждания.

По горизонтали отложено число шагов N, по вертикали — координата D(N), т. е. чистое расстояние от начальной точки.

равной вероятностью можем идти как вперед, так и назад. Однако чувствуется, что с увеличением N мы все с большей вероятностью можем блуждать где-то все дальше и дальше от начальной точки. Поэтому возникает вопрос: каково среднее *абсолютное расстояние*, т. е. каково среднее значение $|D|$? Впрочем, удобнее иметь дело не с $|D|$, а с D^2; эта величина положительна как для положительного, так и для отрицательного движения и поэтому тоже может служить разумной *мерой* таких случайных блужданий.

Можно показать, что ожидаемая величина D_N^2 равна просто N — числу сделанных шагов. Кстати, под «ожидаемой величиной» мы понимаем наиболее вероятное значение (угаданное наилучшим образом), о котором можно думать как об *ожидаемом* среднем значении *большого числа повторяющихся* процессов блуждания. Эта величина обозначается как $\langle D_N^2 \rangle$ и называется, кроме того, «средним квадратом расстояния». После одного шага D^2 всегда равно $+1$, поэтому, несомненно, $\langle D_1^2 \rangle = 1$. (За единицу расстояния всюду будет выбираться один шаг, и поэтому я в дальнейшем не буду писать единиц длины.)

Ожидаемая величина D_N^2 для $N > 1$ может быть получена из D_{N-1}. Если после $(N-1)$ шагов мы оказались на расстоянии D_{N-1}, то еще один шаг даст *либо* $D_N = D_{N-1} + 1$, *либо* $D_N = D_{N-1} - 1$. Или для квадратов

$$D_N^2 = \begin{cases} D_{N-1}^2 + 2D_{N-1} + 1, \\ \quad\quad \textit{либо} \\ D_{N-1}^2 - 2D_{N-1} + 1. \end{cases} \tag{6.7}$$

Если процесс повторяется большое число раз, то мы ожидаем, что каждая из этих возможностей осуществляется с вероятностью $^1/_2$, так что средняя ожидаемая величина будет просто средним арифметическим этих значений, т. е. ожидаемая величина D_N^2 будет просто $D_{N-1}^2 + 1$. Но какова величина D_{N-1}^2, вернее, какого значения ее мы ожидаем? Просто, по определению, ясно, что это должно быть «среднее ожидаемое значение» $\langle D_{N-1}^2 \rangle$, так что

$$\langle D_N^2 \rangle = \langle D_{N-1}^2 \rangle + 1. \tag{6.8}$$

Если теперь вспомнить, что $\langle D_1^2 \rangle = 1$, то получается очень простой результат:

$$\langle D_N^2 \rangle = N. \tag{6.9}$$

Отклонение от начального положения можно характеризовать величиной типа расстояния (а не квадрата расстояния); для этого нужно просто извлечь квадратный корень из $\langle D_N^2 \rangle$ и получить так называемое «среднее квадратичное расстояние» $D_{\text{с-к}}$:

$$D_{\text{с-к}} = \sqrt{\langle D^2 \rangle} = \sqrt{N}. \tag{6.10}$$

Мы уже говорили, что случайные блуждания очень похожи на опыт с подбрасыванием монет, с которого мы начали эту главу. Если представить себе, что каждое продвижение вперед или назад обусловливается выпадением «орла» или «решки», то D_N будет просто равно $N_{\text{О}} - N_{\text{Р}}$, т. е. разности числа выпадений «орла» и «решки». Или поскольку $N_{\text{О}} + N_{\text{Р}} = N$ (где N — полное число подбрасываний), то $D_N = 2N_{\text{О}} - N$. Вспомните, что раньше мы уже получали выражение для ожидаемого распределения величины $N_{\text{О}}$ [она обозначалась тогда через k; см. уравнение (6.5)]. Ну а поскольку N — просто постоянная, то теперь такое же распределение получилось и для D. (Выпадение каждого «орла» означает невыпадение «решки», поэтому в связи между $N_{\text{О}}$ и D появляется множитель 2.) Таким образом, на фиг. 6.2 график представляет одновременно и распределение расстояний, на которые мы можем уйти за 30 случайных шагов ($k = 15$ соответствует $D = 0$, а $k = 16$ соответствует $D = 2$ и т. д.).

Отклонение $N_{\text{О}}$ от ожидаемой величины $N/2$ будет равно

$$N_{\text{О}} - \frac{N}{2} = \frac{D}{2}, \tag{6.11}$$

откуда для среднего квадратичного отклонения получаем

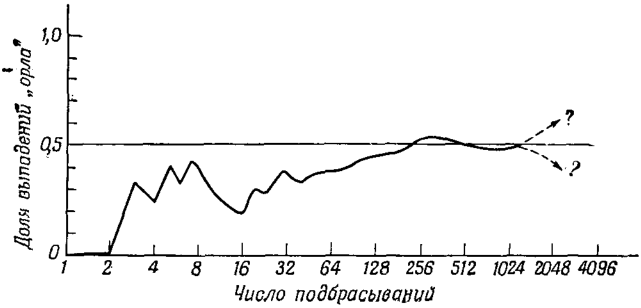
$$\left(N_{\text{О}} - \frac{N}{2}\right)_{\text{с-к}} = \frac{1}{2}\sqrt{N}. \tag{6.12}$$

Вспомним теперь наш результат для $D_{\text{с-к}}$. Мы ожидаем, что среднее расстояние, пройденное за 30 шагов, должно быть равно $\sqrt{30} = 5{,}5$, откуда среднее отклонение k от 15 должно быть $5{,}5 : 2 = 2{,}8$. Заметьте, что средняя полуширина нашей кривой на фиг. 6.2 (т. е. полуширина «колокола» где-то посредине) как раз приблизительно равна 3, что согласуется с этим результатом.

Теперь мы способны рассмотреть вопрос, которого избегали до сих пор. Как узнать, «честна» ли наша монета? Сейчас мы можем, по крайней мере частично, ответить на него. Если монета «честная», то мы ожидаем, что в половине случаев выпадет «орел», т. е.

$$\frac{\langle N_{\text{О}} \rangle}{N} = 0{,}5. \tag{6.13}$$

Одновременно ожидается, что действительное число выпадений «орла» должно отличаться от $N/2$ на величину порядка $\sqrt{N}/2$,



Фиг. 6.6. Доля выпадений «орла» в некоторой частной последовательности N подбрасываний монеты.

или, если говорить о *доле* отклонения, она равна

$$\frac{1}{N}\,\frac{\sqrt{N}}{2}=\frac{1}{2\sqrt{N}},$$

т. е. чем больше N, тем ближе к половине отношение $N_{\text{О}}/N$.

На фиг. 6.6 отложены числа $N_{\text{О}}/N$ для тех подбрасываний монеты, о которых мы говорили раньше. Как видите, при увеличении числа N кривая все ближе и ближе подходит к 0,5. Но, к сожалению, нет никаких *гарантий*, что для каждой данной серии или комбинации серий наблюдаемое отклонение будет *близко к ожидаемому* отклонению. Всегда есть конечная вероятность, что произойдет большая флуктуация — появление большого числа выпадений «орла» или «решки»,— которая даст произвольно большое отклонение. Единственное, что можно сказать,— это *если* отклонения близки к ожидаемому $1/2\sqrt{N}$ (скажем, со множителем 2 или 3), то нет оснований считать монету «поддельной» (или что партнер плутует).

Мы не рассматривали еще случаи, когда для монеты или какого-то другого объекта испытания, подобного монете (в том смысле, что возможны два или несколько достоверно не предсказуемых исхода наблюдения, например камень, который может упасть только на какую-то из двух сторон), имеется достаточно оснований полагать, что вероятности разных исходов не равны. Мы определили вероятность $P(\text{О})$ как отношение $\langle N_{\text{О}}\rangle/N$. Но что принять за величину $\langle N_{\text{О}}\rangle$? Каким образом можно узнать, что *ожидается*? Во многих случаях самое лучшее, что можно сделать, это подсчитать число выпадений «орла» в большой серии испытаний и взять $\langle N_{\text{О}}\rangle = N_{\text{О}}$ (наблюденное). (Как можно ожидать чего-то еще?) При этом, однако, нужно понимать, что различные наблюдатели и различные серии испытаний могут дать другое значение $P(\text{О})$, отличное от нашего. Следует *ожидать*, однако, что все эти различные ответы не будут расходиться больше чем на $1/2\sqrt{N}$ [если P(О) близко к половине]. Физики-экспериментаторы обычно говорят, что «экспериментально найденная» вероятность имеет «ошибку», и записывают это в виде

$$P\ (\mathrm{O}) = \frac{N_{\mathrm{O}}}{N} \pm \frac{1}{2\sqrt{N}}\,. \tag{6.14}$$

При такой записи подразумевается, что существует некая «истинная» вероятность, которую в принципе *можно подсчитать*, но что различные флуктуации приводят к ошибке при экспериментальном ее определении. Однако нет возможности сделать эти рассуждения логически согласованными. Лучше все-таки, чтобы вы поняли, что вероятность в каком-то смысле — вещь субъективная, что она всегда основывается на какой-то неопределенности наших познаний и величина ее колеблется при их изменении.

§ 4. *Распределение вероятностей*

Давайте вернемся к проблеме случайных блужданий, но теперь уже с некоторым изменением. Пусть в дополнение к случайному выбору *направления* шага (+ или —) некоторым непредсказуемым образом меняется также и его *длина*, причем требуется выполнение одного-единственного условия, чтобы длина шага *в среднем* была равна единице. Эта задача уже больше похожа на тепловое движение молекул в газе. Обозначим длину шага через S, которая, вообще говоря, может быть любой, но наиболее часто будет принимать значения где-то «вблизи» единицы. Для большей определенности давайте положим $\langle S^2\rangle = 1$, или, что эквивалентно, $S_{\text{с-к}} = 1$. Вывод выражения для $\langle D^2\rangle$ при этом останется тем же, за исключением того, что уравнение (6.8) изменится теперь следующим образом:

$$\langle D_N^2\rangle = \langle D_{N-1}^2\rangle + \langle S^2\rangle = \langle D_{N-1}^2\rangle + 1. \tag{6.15}$$

Так что, как и прежде,

$$\langle D_N^2\rangle = N. \tag{6.16}$$

Каково же в этом случае будет распределение расстояний? Какова, например, вероятность того, что после 30 шагов D окажется равным нулю? Вероятность этого равна нулю! Вообще вероятность *любой заданной* величины D равна нулю. Действительно, совершенно невероятно, чтобы сумма всех шагов назад (при произвольной длине каждого из них) в точности скомпенсировалась шагами вперед. В этом случае мы уже не можем построить график типа изображенного на фиг. 6.2.

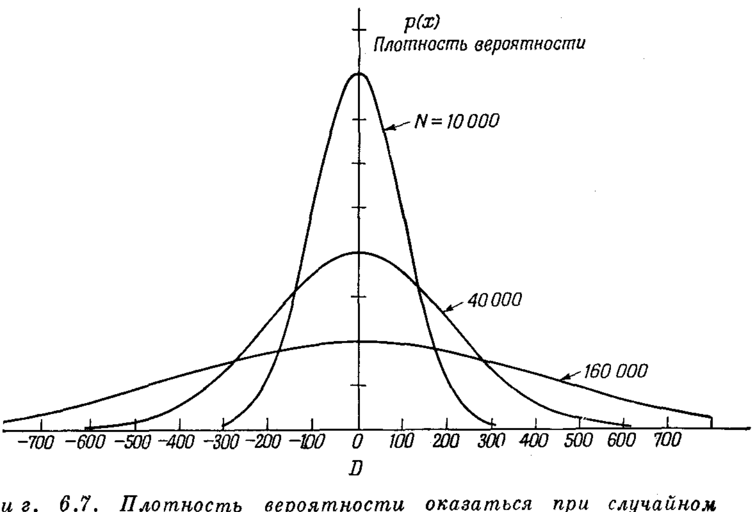
Если же, однако, не требовать, чтобы D было в точности равно, скажем, нулю, или единице, или двум, а вместо этого говорить о вероятности получения D где-то *вблизи* нуля, или единицы, или двух, то при этом мы можем нарисовать график, подобный приведенному на фиг. 6.2. Назовем $P(x, \Delta x)$ вероятностью того, что D будет находиться где-то внутри интервала Δx в окрестности величины x (скажем, где-то между x и $x + \Delta x$). Если Δx достаточно мало, то вероятность того, что D попадет в этот интервал, должна быть пропорциональна его ширине, т. е. Δx. Поэтому мы можем утверждать, что

$$P(x, \Delta x) = p(x)\,\Delta x. \qquad (6.17)$$

Функция $p(x)$ называется *плотностью вероятности.*

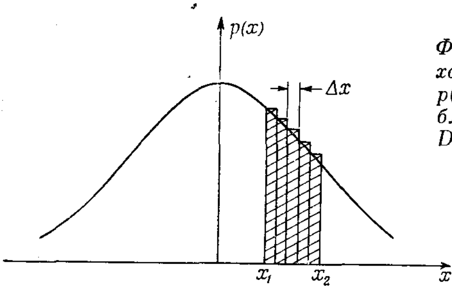
Вид кривой $p(x)$ зависит как от числа шагов N, так и от распределения шагов по длинам (т. е. от того, какую долю составляют шаги данной длины). К сожалению, я не могу здесь заниматься доказательством этого, а только скажу, что при достаточно большом числе шагов N плотность $p(x)$ *одинакова* для всех разумных распределений шагов по длинам и зависит лишь от самого N. На фиг. 6.7 показаны три графика $p(x)$ для различных N. Заметьте, что «полуширины» этих кривых, как это и должно быть по нашим предыдущим расчетам, приблизительно равны $\sqrt{N}$.

Вы, вероятно, заметили также, что величина $p(x)$ вблизи нуля обратно пропорциональна $\sqrt{N}$. Это происходит потому, что все кривые по форме очень похожи, только одни «размазаны» больше, а другие — меньше, и, кроме того, площади, ограниченные каждой кривой и осью x, должны быть равны. Действи-



Фиг. 6.7. Плотность вероятности оказаться при случайном блуждании через N шагов на расстоянии D.

D измеряется в единицах средней квадратичной длины шага.



Фиг. 6.8. Вероятность [*заштрихованная область под кривой* $p(x)$] *того, что при случайном блуждании пройденное расстояние* D *окажется между* x_1 *и* x_2.

тельно, ведь $p(x)\,\Delta x$ это вероятность того, что D находится где-то внутри интервала Δx (Δx мало). Как определить вероятность того, что D находится где-то между x_1 и x_2? Для этого разобьем интервал между x_1 и x_2 на узкие полоски шириной Δx (фиг. 6.8) и вычислим сумму членов $p(x)\,\Delta x$ для каждой такой полоски. Геометрически эта вероятность [запишем ее в виде $P(x_1 < D < x_2)$] равна площади заштрихованной области на фиг. 6.8. При этом чем у́же будут наши полоски, тем точнее результат. Поэтому можно записать

$$P(x_1 < D < x_2) = \sum p(x)\,\Delta x = \int_{x_1}^{x_2} p(x)\,dx. \tag{6.18}$$

Площадь же ограничения всей кривой просто равна вероятности того, что D принимает *какое-то* значение между $-\infty$ и $+\infty$. Ясно, что она должна быть равна единице, т. е.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)\,dx = 1. \tag{6.19}$$

Ну а поскольку ширина кривых на фиг. 6.7 пропорциональна $\sqrt{N}$, то, чтобы сохранить ту же площадь, их высота должна быть пропорциональна $1/\sqrt{N}$.

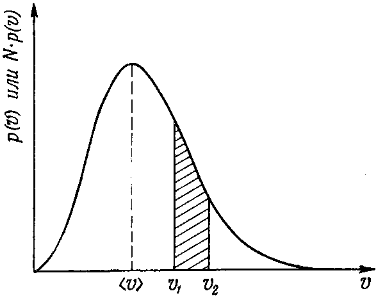
Плотность вероятности, которую мы только что описали, встречается наиболее часто. Она известна также под названием *нормальной*, или *гауссовой*, плотности вероятности и записывается в виде

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-x^2/2\sigma^2}, \tag{6.20}$$

причем величина σ называется *стандартным отклонением*. В нашем случае $\sigma = \sqrt{N}$ или $\sqrt{N}S_{\text{с-к}}$, если средняя квадратичная длина шага отлична от единицы.

Мы уже говорили о том, что движения молекул или каких-то других частиц в газе похожи на случайные блуждания. Пред-

Фиг. 6.9. Распределение молекул газа по скоростям.



ставьте себе, что мы открыли в комнате пузырек с духами или каким-то другим органическим веществом. Тотчас же молекулы его начнут испаряться в воздух. Если в комнате есть какие-то воздушные течения, скажем циркуляция воздуха, то они будут переносить с собой пары этого вещества. Но даже *в совершенно спокойном воздухе* молекулы будут распространяться, пока не проникнут во все уголки комнаты. Это можно определить по запаху или цвету. Если нам известен средний размер «шага» и число шагов в секунду, то можно подсчитать вероятность обнаружения одной или нескольких молекул вещества на некотором расстоянии от пузырька через какой-то промежуток времени. С течением времени число шагов возрастает и газ «расползается» по комнате, подобно нашим кривым на фиг. 6.7. Длина шагов и их частота, как вы узнаете впоследствии, связаны с температурой и давлением воздуха в комнате.

Вы знаете, что давление газа вызывается тем, что молекулы его бомбардируют стенки сосуда. Позднее, когда мы подойдем к количественному описанию этого явления, нам понадобится знать, с какой скоростью движутся молекулы, ударяясь о стенку, поскольку сила их ударов зависит от скорости. Однако говорить о какой-то *определенной* скорости молекул совершенно невозможно. В этом случае необходимо использовать вероятностное описание. Молекула может иметь любую скорость, но некоторые скорости предпочтительнее других. Все происходящее в газе можно описать, сказав, что вероятность того, что данная молекула движется с какой-то скоростью между v и $v+\Delta v$, будет равна $p(v)\Delta v$, где $p(v)$ — плотность вероятности, которая зависит от скорости v. Позднее я расскажу, как Максвелл, используя общие понятия и идеи теории вероятности, нашел математическое выражение для функции $p(v)$ *. Примерный вид функции $p(v)$ показан на фиг. 6.9. Скорость может иметь любую величину, однако больше шансов за то, что она окажется где-то

* Максвелл получил выражение $p(v)=Cv^2e^{-av^2}$, где a — некоторая связанная с температурой постоянная, а C выбирается таким образом, чтобы полная вероятность была равна единице.

в окрестности наиболее вероятного или ожидаемого значения $\langle v \rangle$.

О кривой, показанной на фиг. 6.9, часто говорят в несколько ином смысле. Если мы возьмем газ, заключенный в каком-то сосуде (скажем, объемом 1 *л*), то окажется, что в нем имеется огромное количество молекул ($N \approx 10^{22}$). Поскольку $p(v)\,\Delta v$ — вероятность того, что первая попавшаяся молекула будет лететь со скоростью, находящейся в интервале Δv, то, по определению, *ожидаемое* число молекул $\langle \Delta N \rangle$ со скоростью, находящейся в этом же интервале, будет равно

$$\langle \Delta N \rangle = Np\,(v)\,\Delta v. \tag{6.21}$$

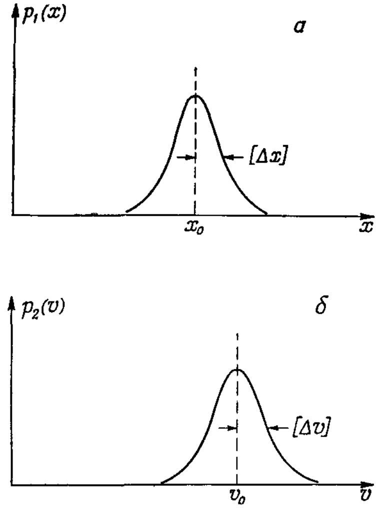
Поэтому $Np\,(v)$ можно назвать «распределением молекул по скоростям». Площадь под кривой между двумя значениями скоростей v_1 и v_2 [заштрихованная область на фиг. 6.9 для кривой $Np(v)$] представляет ожидаемое число молекул со скоростями между v_1 и v_2. Но в газе, который содержит обычно огромное число молекул, отклонения от ожидаемого значения будут очень малы (порядка $1/\sqrt{N}$), поэтому часто мы выбрасываем слово «ожидаемое» и говорим просто: «Число молекул со скоростями между v_1 и v_2 равно площади заштрихованного участка».Однако нужно все-таки помнить, что речь в таких случаях всегда идет о *вероятном* числе.

§ 5. *Принцип неопределенности*

Понятия вероятности оказались очень полезны при описании поведения газа, состоящего из огромного количества молекул. Немыслимо же в самом деле пытаться определить положение и скорость каждой из 10^{22} молекул! Когда впервые теория вероятности была применена к таким явлениям, то это рассматривалось просто как удобный способ работы в столь сложной обстановке. Однако теперь мы полагаем, что вероятность *существенно необходима* для описания различных атомных процессов. Согласно квантовой механике, этой математической теории малых частичек, при *определении* положения частички и ее скорости всегда существует некоторая неопределенность. В лучшем случае мы можем только сказать, что существует какая-то вероятность того, что частица находится вблизи точки x.

Для описания местоположения частицы можно ввести плотность вероятности $p_1\,(x)$, так что $p_1\,(x)\,\Delta x$ будет вероятностью того, что частица находится где-то между x и $x + \Delta x$. Если положение частицы установлено достаточно хорошо, то примерный вид функции $p_1(x)$ может иллюстрировать график, приведенный на фиг. 6.10, *а*. Точно такое же положение и со скоростью частицы: она тоже неизвестна нам точно. С некоторой

Фиг. 6.10. Плотности вероятности координаты (а) и скорости (б) частицы.



вероятностью $p_2(v)\Delta v$ частица может двигаться со скоростью, находящейся в интервале между v и $v+\Delta v$.

Один из основных результатов квантовой механики состоит в том, что эти две плотности $p_1(x)$ и $p_2(v)$ не могут быть выбраны независимо в том смысле, что они обе не могут быть сколь угодно узкими. Если мы возьмем «полуширины» кривых $p_1(x)$ и $p_2(v)$ и обозначим их соответственно $[\Delta x]$ и $[\Delta v]$ (см. фиг. 6.10), то природа требует, чтобы *произведение* этих двух полуширин было не меньше величины h/m, где m — масса частицы, а h — некоторая фундаментальная физическая постоянная, называемая *постоянной Планка*. Это соотношение записывается следующим образом:

$$[\Delta x]\,[\Delta v] \geqslant \frac{h}{m} \qquad (6.22)$$

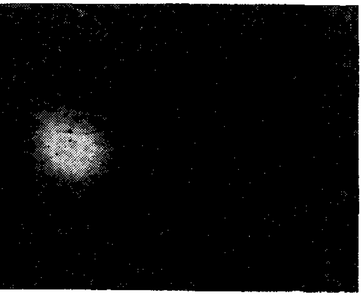
и называется *принципом неопределенности Гейзенберга*.

Чтобы это соотношение выполнялось, частица должна себя вести очень курьезно. Вы видите, что правая часть соотношения (6.22) постоянна, а это означает, что если мы попытаемся «приколоть» частицу в каком-то определенном месте, то эта попытка окончится тем, что мы не сможем угадать, куда она летит и с какой скоростью. Точно так же если мы попытаемся заставить частицу двигаться очень медленно или с какой-то *определенной* скоростью, то она будет «расплываться», и мы не сможем точно указать, где она находится.

Принцип неопределенности выражает ту неясность, которая должна существовать при любой попытке описания природы. Наиболее точное и полное описание природы должно быть только вероятностным. Однако некоторым физикам такой способ описания приходится не по душе. Им кажется, что о *реальном* поведении частицы можно говорить только, когда одновременно заданы импульсы и координаты. В свое время на заре развития квантовой механики эта проблема очень сильно волновала Эйнштейна. Он часто качал головой и говорил: «Но ведь не гадает же господь бог «орел — решка», чтобы решить, куда должен двигаться электрон!» Этот вопрос беспокоил его в течение очень долгого времени, и до конца своих дней он, по-видимому, так и не смог примириться с тем фактом, что вероятностное описание природы — это максимум того, на что мы пока способны. Есть физики, которые интуитивно чувствуют, что наш мир можно описать как-то по-другому, что можно исключить эти неопределенности в поведении частиц. Они продолжают работать над этой проблемой, но до сих пор ни один из них не добился сколько-нибудь существенного результата.

Эта присущая миру неопределенность в определении положения частицы является наиболее важной чертой описания структуры атомов. В атоме водорода, например, который состоит из одного протона, образующего ядро, и электрона, находящегося где-то вне его, неопределенность в местонахождении электрона такая же, как и размеры самого атома! Мы не можем поэтому с уверенностью сказать, где, в какой части атома находится наш электрон, и уж, конечно, не может быть и речи ни о каких «орбитах». С уверенностью можно говорить только о *вероятности* $p(r)\Delta V$ обнаружить электрон в элементе объема ΔV на расстоянии r от протона. Квантовая механика позволяет в этом случае вычислять плотности вероятности $p(r)$, которая для невозмущенного атома водорода равна $Ae^{-r^2a^2}$. Это — колоколообразная функция наподобие изображенной на фиг. 6.8, причем число a представляет собой характерную величину радиуса, после которого функция очень быстро убывает. Несмотря на то что существует вероятность (хотя и небольшая) обнаружить электрон на большем, чем a, расстоянии от ядра, мы называем эту величину «радиусом атома». Она равна приблизительно 10^{-10} *м*.

Если вы хотите как-то представить себе атом водорода, то вообразите этакое «облако», плотность которого пропорциональна плотности вероятности. Пример такого облака показан на



Фиг. 6.11. Воображаемый атом водорода.

Плотность («белизна») облачка пропорциональна плотности вероятности обнаружения электрона.

фиг. 6.11. Такая наглядная картинка, пожалуй, наиболее близка к истине, хотя тут же нужно помнить, что это *не реальное* «электронное облако», а только «облако вероятностей». Где-то внутри него находится электрон, но природа позволяет нам только гадать, где же именно он находится.

В своем стремлении узнать о природе вещей как можно больше современная физика обнаружила, что существуют вещи, познать которые точно ей никогда не удастся. Многому из наших знаний суждено навсегда остаться неопределенным. Нам дано знать *только* вероятности.

Глава 7

ТЕОРИЯ ТЯГОТЕНИЯ

§ 1. Движение планет

В этой главе речь пойдет об одном из самых далеко идущих обобщений, сделанных когда-либо человеческим разумом. Мы заслуженно восхищаемся умом человека, но неплохо было бы постоять некоторое время в благоговении и перед *природой*, полностью беспрекословно подчиняющейся такому изящному и такому простому закону — закону тяготения. В чем же заключается этот закон? Каждый объект Вселенной притягивается к любому другому объекту с силой, пропорциональной их массам и обратно пропорциональной квадрату расстояния между ними. Математическая запись этого утверждения такова:

$$F = G\frac{mm'}{r^2}.$$

Если к этому добавить, что любое тело реагирует на приложенную к нему силу ускорением в направлении этой силы, по величине обратно пропорциональным массе тела, то способному математику этих сведений достаточно для вывода всех дальнейших следствий.

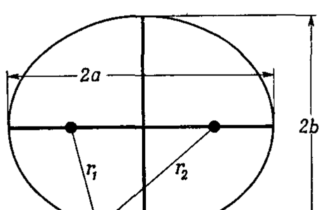
Но поскольку, как мы предполагаем, вы еще не столь талантливы, вооружим вас не только этими двумя аксиомами. Давайте вместе разберем следствия из них. Мы изложим вкратце историю открытия закона тяготения, остановимся на некоторых выводах из него и на его влиянии на историю, на загадках этого закона и на уточнении его Эйнштейном; мы хотим еще обсудить связь закона тяготения с другими законами физики. Всего этого в одну главу не уложишь, но в надлежащих местах других глав мы снова будем возвращаться к этому.

История начинается с древних; наши предки наблюдали движение планет среди звезд и в конце концов поняли, что планеты движутся вокруг Солнца — факт, заново открытый позже Коперником. Немного больше труда потребовалось, чтобы открыть, *как* именно они вращаются. В начале XV столетия шли большие дебаты о том, действительно ли планеты обращаются вокруг Солнца или нет. У Тихо Браге на этот счет было свое представление, далекое от того, что думали древние: мысль его состояла в том, что все споры о природе движения планет разрешатся, если достаточно точно измерить положение планет на небе. Если измерения точно установят, как движутся планеты, то не исключено, что из двух точек зрения удастся отобрать одну. Это была неслыханная идея — чтобы открыть что-то, лучше-де проделать тщательные опыты, чем приводить глубокие философские доказательства. Следуя ей, Тихо Браге многие годы изучал положения планет в своей обсерватории на острове Фюн, близ Копенгагена. Он составил объемистые таблицы, впоследствии, после смерти Тихо, изученные математиком Кеплером. Из его данных Кеплер и извлек замечательные, очень красивые и простые законы, управляющие движением планет.

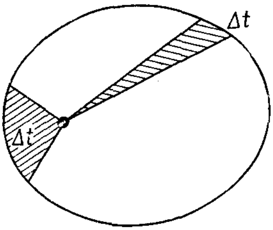
§ 2. *Законы Кеплера*

Прежде всего Кеплер понял, что все планеты движутся вокруг Солнца по кривой, называемой *эллипсом*, причем Солнце находится в фокусе эллипса. Эллипс — это не совсем овал, это особым образом точно определяемая кривая. Получить такую кривую можно, воткнув в фокусы по булавке, к которым привязана нить, натянутая карандашом. Выражаясь математически, это — геометрическое место точек, сумма расстояний которых от двух заданных точек (фокусов) постоянна. Или, если угодно, это — окружность, видимая под углом к своей плоскости (фиг. 7.1).

Другое наблюдение Кеплера состояло в том, что планеты движутся не с постоянной скоростью: поблизости от Солнца — быстрее, а удаляясь — медленнее. Более точно: пусть планета наблюдается в два последовательных момента времени, скажем на протяжении недели, и к каждому положению планеты про-



Фиг. 7.1. Эллипс.



Фиг. 7.2. Кеплеров закон площадей.

веден радиус-вектор*. Дуга орбиты, пройденная планетой за неделю, и два радиус-вектора ограничивают некоторую площадь, заштрихованную на фиг. 7. 2. Если такие же наблюдения в течение недели проделать в другое время, когда планета движется по дальнему участку орбиты (т. е. медленнее), то построенная таким же способом фигура окажется по площади равной прежней. Итак, в соответствии со вторым законом орбитальная скорость любой планеты такова, что радиус «заметает» равные площади в равные интервалы времени.

Третий закон был открыт Кеплером гораздо позже; он другого рода, нежели первые два: он уже касается не одной планеты, а связывает между собой разные планеты. Закон утверждает, что если сравнить между собой период обращения и размеры орбиты двух планет, то периоды пропорциональны полуторной степени размеров орбит. Здесь период — это время, нужное планете для того, чтобы обойти всю орбиту; размер же измеряется длиной наибольшего диаметра эллиптической орбиты, ее большой оси. Считая орбиты кругами (чем они почти и являются), можно сказать проще: время одного оборота по кругу пропорционально его диаметру (или радиусу) в степени $^3/_2$. Итак, три закона Кеплера таковы:

1. Все планеты движутся вокруг Солнца по эллипсу, в одном из фокусов которого находится Солнце.

2. Радиус-вектор от Солнца до планеты «заметает» равные площади в равные интервалы времени.

3. Квадраты времен обращения двух планет пропорциональны кубам больших полуосей их орбит: $T^2 \sim a^3$.

§ 3. *Развитие динамики*

В то время, когда Кеплер открывал эти законы, Галилей изучал законы движения. Он пытался выяснить, чтó заставляет планеты двигаться. (В те дни одна из предлагавшихся теорий утверждала: планеты движутся потому, что за ними летят невидимые ангелы, которые взмахами своих крыльев гонят планеты вперед. Ныне эта теория, как вы вскоре увидите, несколько

* Отрезок, соединяющий Солнце с точкой орбиты.

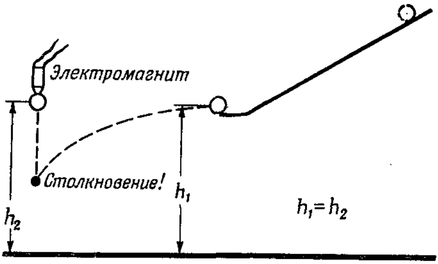
видоизменена! По-видимому, чтобы заставить планеты вращаться, невидимые ангелы обязаны витать во всевозможных направлениях и обходиться без крыльев. В остальном эти теории схожи!) И Галилей открыл одно знаменательное свойство движения, достаточное, чтобы понять эти законы. Это — принцип *инерции*: если при движении тела его ничто не касается, ничто не возмущает, то оно может лететь вечно с постоянной скоростью и по прямой. (А *почему* это так? Мы этого не знаем, но так уж оно повелось.)

Ньютон затем видоизменил эту мысль, говоря, что единственный способ изменить движение тела — это применить *силу*. Если тело разгоняется, значит сила была приложена *в направлении движения*. Если тело повернуло *в сторону*, то сила была приложена *сбоку*. Если, например, привязать камень к бечевке и вертеть им по кругу, то, чтобы удержать его на окружности, нужна сила. Мы должны все время *натягивать* бечевку. Закон состоит в следующем: *ускорение, производимое силой, обратно пропорционально массе*. Или иначе: *сила пропорциональна массе и ускорению*. Чем массивнее тело, тем бóльшая сила необходима, чтобы создать нужное ускорение. (Массу можно измерить, привязав к веревке другой камень и вертя им по тому же кругу с той же скоростью. Так можно обнаружить, что массивным телам нужна бóльшая сила.) Из этих рассуждений последовала блестящая мысль: чтобы удержать планету на ее орбите, никакой *касательной* силы не нужно (ангелам нет нужды летать по касательной), потому что планета и так будет лететь в нужном направлении. Если бы ничего ей не мешало, она бы удалилась по *прямой линии*. Но истинное движение уклоняется от этой прямой и отклоняется как раз поперек движения, а не по движению. Иными словами, благодаря принципу инерции сила, потребная для управления движением планет вокруг Солнца, это не сила, вращающая их *вокруг* Солнца, а сила, *направленная* к Солнцу (ну, а раз сила направлена к Солнцу, то, бесспорно, это и есть тот самый ангел!).

§ 4. *Ньютонов закон тяготения*

Лучше других поняв природу движения, Ньютон прикинул, что именно *Солнце* может явиться источником, штаб-квартирой сил, управляющих движением планет. Он убедился (вскоре, быть может, убедимся в этом и мы), что «заметание» равных площадей в равные интервалы времени есть верный знак того, что все отклонения от прямой в точности радиальны, или что закон площадей есть прямое следствие того, что все силы направлены точно *к Солнцу*.

Кроме того, из анализа третьего закона Кеплера можно вывести, что чем дальше от Солнца планета, тем слабее сила. Из



Фиг. 7.3. Прибор для демонстрации независимости вертикальных и горизонтальных движений.

сравнения двух планет на разных расстояниях следует, что силы обратно пропорциональны квадратам относительных расстояний. Сочетая оба закона, Ньютон пришел к заключению, что должна существовать сила, обратная квадрату расстояния и направленная по прямой между Солнцем и планетой.

Будучи человеком, склонным к обобщениям, Ньютон, конечно, предположил, что эта связь применима не только к Солнцу, удерживающему планеты, но что она носит более общий характер. Уже было известно, к примеру, что вокруг Юпитера обращаются луны, подобно тому как Луна ходит вокруг Земли, и Ньютону казалось естественным, что и планеты силой держат свои луны возле себя. Тогда он уже знал о силе, удерживающей *нас* на Земле, и предположил, что эта сила *всеобщая* и что *все притягивается ко всему.*

Тогда он спросил себя: притягивает ли Земля людей так же, как Луну («так же» значит обратно пропорционально квадрату расстояния). Если тело у поверхности Земли падает в первую секунду (из состояния покоя) на 4,9 *м*, то на сколько падает Луна? Можно возразить, что Луна вообще не падает. Но если бы на Луну не действовала сила, она бы унеслась по прямой линии, а на самом деле она обращается по круговой орбите; следовательно, она *падает* с того места, где она должна была бы быть, если бы сила на нее не действовала. Зная радиус орбиты Луны (около 384 000 *км*) и время ее оборота вокруг Земли (около 29 дней), можно подсчитать, сколько она проходит за 1 *сек* и затем на сколько за это время она падает *. Оказывается, что это расстояние примерно равно 1,36 *мм*. Это хорошо укладывается в закон обратных квадратов, потому что радиус Земли 6370 *км*, и если на этом расстоянии тела, падая, проходят в первую секунду 4,9 *м*, то на расстоянии в 384 тыс. *км*, т. е. в 60 раз дальше от центра Земли, они должны падать на 1/3600 от 4,9 *м*, или как раз на 1,36 *мм*. Желая подтвердить свою теорию тяготения подобными расчетами, Ньютон их аккуратно проде-

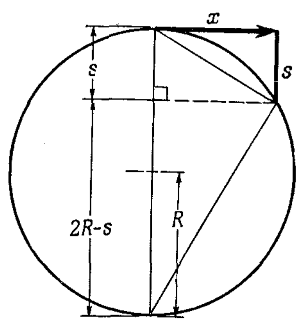
* Иначе говоря, на сколько окружность (орбита Луны) отходит от касательной к ней на протяжении пути, проходимого Луной за 1 *сек*.

лал и… получил сильнейшее несовпадение цифр. Он счел, что теория противоречит фактам, и не опубликовал ее. Шестью годами позже новые измерения радиуса Земли показали, что принятое в ту пору астрономами расстояние до Луны было неверным. Услышав об этом, Ньютон провел новый расчет с исправленными цифрами и получил уже превосходное совпадение.

Мысль, что Луна «падает», несколько смущает; почему же она тогда *не приближается*? Эта мысль настолько интересна, что заслуживает дальнейшего пояснения: Луна «падает» в том смысле, что *отклоняется от прямой линии, по которой она бы двигалась, не будь больше никаких сил.*

Рассмотрим другой, уже чисто земной пример. Тело, выпущенное из рук у земной поверхности, упадет в первую секунду на 4,9 *м*. Тело, брошенное *горизонтально*, также падает на 4,9 *м*.

На фиг. 7.3 показан прибор, демонстрирующий это явление. Из горизонтального желоба выскакивает и летит вперед шарик. С той же высоты вертикально падает вниз другой шарик (имеется электрическая схема, выпускающая второй шар как раз в тот момент, когда первый соскальзывает с желоба). Они сталкиваются в воздухе, т. е. это значит, что они за одинаковое время снижаются одинаково. Пуля, выпущенная горизонтально, может пройти за 1 *сек* даже полкилометра, а вниз за это время она упадет на 4,9 *м*. Что случится, если пуля будет вылетать из ствола все быстрее? Не забудьте, что поверхность Земли кривая. Пуля может вылететь с такой скоростью, что, упав на 4,9 *м*, она все равно останется по отношению к Земле на первоначальной высоте. Может ли такое быть? Да; хотя она падает, но и Земля искривляется, вот и получается падение «вокруг» Земли. Надо только узнать, на каком расстоянии поверхность Земли окажется на 4,9 *м* ниже горизонта. На фиг. 7.4 изображена Земля с ее радиусом (6370 *км*) и касательный прямой путь пули (в отсутствие сил). Остается вспомнить одну из занятных геометрических теорем о том, что длина полухорды, перпендикулярной диаметру, равна среднему геометрическому между длинами отрезков диаметра. Значит, расстояние, пройденное пулей, есть



Фиг. 7.4. Ускорение к центру на круговом пути.

Из планиметрии $x/s=(2R-s)/x \approx 2R/x$, *где* R *— радиус Земли (6370 км);* x *— расстояние, «пройденное горизонтально» за 1 сек;* s *— длина пути «падения» за 1 сек (4,9 м).*

среднее пропорциональное между 4,9 *м* падения и 12 740 *км* диаметра Земли, т. е.

$$\sqrt{0{,}0049 \cdot 12\,740} \approx 7{,}9 \text{ км}.$$

Итак, если пуля движется с быстротой 7,9 *км/сек*, она будет попрежнему падать каждую секунду на 4,9 *м*, но никогда не приблизится к поверхности, уходящей от нее вследствие своей кривизны. Так было и с космонавтом Гагариным, который держался на одной высоте, делая примерно 8 *км* в секунду, т. е. 40 000 *км* за оборот (на самом деле чуть побольше, так как и летел он повыше).

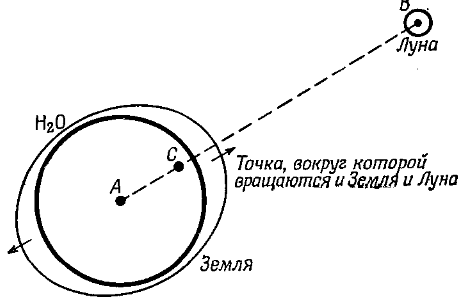
Любое открытие нового закона полезно лишь тогда, когда из него можно извлечь больше того, что в него было вложено. Ньютон *применил* второй и третий законы Кеплера для того, чтобы вывести закон тяготения. Что же он *предсказал*? Первым предсказанием был его анализ движения Луны: движение это увязывалось с падением тел на Земле. Вторым был ответ на вопрос, *являются ли орбиты эллипсами*. Можно точно рассчитать движение, можно доказать и то, что это эллипс *; стало быть, никаких добавочных фактов для доказательства *первого* закона Кеплера не нужно. Так Ньютон сделал свое первое мощное предсказание.

Закон тяготения объяснил многие явления, прежде непонятные. Например, притяжение Луны вызывает на Земле приливы — явление дотоле таинственное. Люди и раньше догадывались, что Луна притягивает воду под собой и получается прилив, но они не были так умны, как Ньютон, и думали, что должен быть только один прилив в сутки. Считалось, что Луна притягивает воду, вызывая прилив, но так как Земля вращается, то в каждом месте вода должна раз в сутки подняться и опуститься. А на самом деле прилив бывает каждые 12 часов. Была и другая школа передовой мысли; по ее мнению, прилив должен быть и на противоположной стороне Земли, потому что Луна всегда отрывает сушу от воды! Обе эти теории неверны. Настоящее объяснение примерно таково: притяжение Луной суши и воды «уравновешено» в центре. Но притяжение Луной тех масс воды, которые находятся на «лунной» стороне Земли, *сильнее*, чем среднее притяжение всей Земли, а притяжение масс воды на обратной стороне Земли *слабее* среднего. Кроме того, вода в отличие от суши может течь. Истинная причина приливов и определяется этими двумя факторами.

Что мы понимаем под словом «уравновешено»? Что именно уравновешивается? А вот что. Если Луна притягивает к себе всю Землю, то почему Земля не падает «вверх» на Луну? По той же причине, почему и Луна не падает на Землю: Земля вращается

* В нашем курсе нет этого доказательства.

Фиг. 7.5. Система Земля—Луна с приливами.

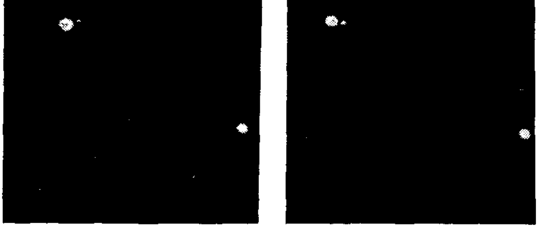


вокруг точки, которая находится внутри Земли (но не в ее центре). Не Луна вращается вокруг Земли, а обе они вращаются вокруг общего центра и обе падают на него, как показано на фиг. 7.5. Это движение вокруг общего центра и уравновешивает падение каждого из двух небесных тел. Так что и Земля тоже движется не по прямой линии, а по круговой орбите. Массы воды на дальней стороне отбрасываются из-за «центробежной силы» сильнее, чем центр Земли, который как раз уравновешен притяжением Луны. Притяжение Луны на дальней стороне слабее и «центробежная сила» больше. В итоге равновесие воды нарушается: она удаляется от центра Земли. На ближней стороне Луна притягивает сильнее, но из-за меньшей величины радиус-вектора оказывается меньше и «центробежная сила», равновесие нарушается в обратную сторону, но по-прежнему *от* центра Земли. В итоге появляются *два* приливных «горба».

§ 5. Всемирное тяготение

Что же еще можно понять, зная о существовании тяготения? Всем известно, что Земля круглая. А почему? Ну, это понятно: конечно, благодаря тяготению. Земля круглая просто потому, что между всеми телами существует притяжение, и все, из чего возникла Земля, тоже взаимно притягивалось до тех пор, пока было куда притягиваться! Точнее говоря, Земля *не совсем* шар; она ведь вращается, и центробежная сила на экваторе противодействует тяготению. Выходит, что Земля должна быть эллипсоидом, и можно даже получить правильную его форму. Итак, из закона тяготения следует, что и Солнце, и Луна, и Земля должны быть (приблизительно) шарами.

Что же еще следует из закона тяготения? Наблюдая за спутниками Юпитера, можно понять все законы их движения вокруг планеты. В этой связи стоит рассказать об одной заминке, которая вышла у закона тяготения с лунами Юпитера. Эти спутники очень подробно изучались Рёмером, и вот он заметил, что временами они нарушают расписание: то опаздывают, то приходят в назначенное место раньше времени (расписание можно составить, понаблюдав за ними достаточно долго и

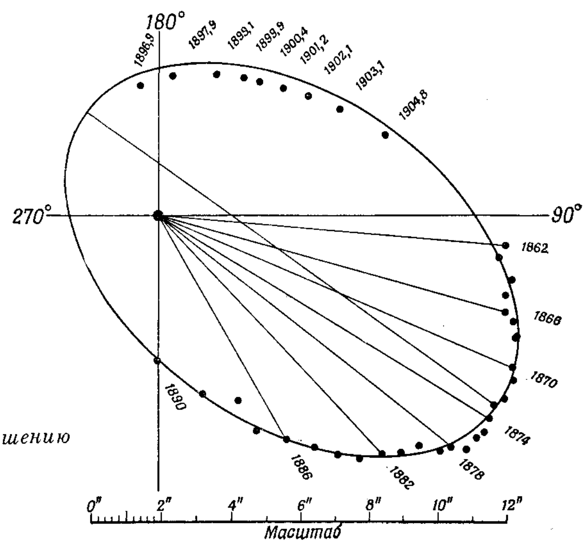


Фиг. 7.6. Система двойной звезды.

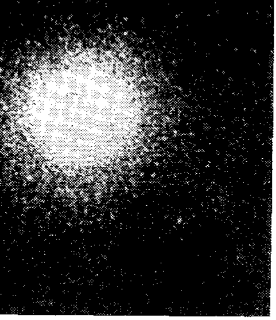
подсчитав по многим оборотам средний период обращения). Более того, он заметил, что опоздания случаются, когда Юпитер удален от Земли, а когда мы от Юпитера близко, то движение лун опережает расписание. Такую вещь очень трудно было уложить в закон тяготения, и ему бы угрожала безвременная кончина, не найдись другого объяснения. Ведь если закону противоречит хотя бы один случай, то закон неверен. Но причина расхождения оказалась очень естественной и красивой: дело просто в том, что необходимо какое-то время, чтобы увидеть луну на нужном месте, ведь свет от нее до нас доходит не мгновенно. Время это небольшое, когда Юпитер находится близко к Земле, но оно затягивается, когда Юпитер удалится от нее. Вот почему кажется, что луны в среднем торопятся или отстают в зависимости от того, близко ли или далеко они находятся от Земли. Это явление доказало, что свет распространяется не мгновенно, и снабдило нас первой оценкой его скорости (было это в 1676 г.).

Если все планеты притягиваются друг к другу, то сила, управляющая, скажем, обращением Юпитера вокруг Солнца, это не совсем сила притяжения к Солнцу; ведь есть еще и притяжение, например, Сатурна. Оно невелико (Солнце куда больше Сатурна), но оно *есть*, и потому орбита Юпитера не может быть точным эллипсом; она чуть колеблется относительно эллиптической траектории, так что движение несколько усложняется. Были предприняты попытки проанализировать движение Юпитера, Сатурна и Урана на основе закона тяготения. Чтобы узнать, удастся ли мелкие отклонения и неправильности в движении планет полностью объяснить только на основе одного этого закона, рассчитали влияние каждой из них на остальные. Для Юпитера и Сатурна все сошло как следует, но Уран — что за чудеса! — повел себя очень странно. Он двигался не по точному эллипсу, чего, впрочем, и следовало ожидать из-за влияния притяжения Юпитера и Сатурна. Но и с учетом их притяжения движение Урана *все равно* было неправильным; таким образом, законы тяготения оказались в опасности (возможность эту нельзя было исключить). Двое ученых, Адамс и Леверрье в Англии и Франции, независимо задумались об иной возможности: нет ли там *еще одной* планеты, тусклой и невидимой, пока еще не открытой. Эта планета, назовем ее N, могла притягивать Уран. Они рассчитали, где эта планета должна находиться, чтобы причинить наблюдаемые возмущения пути Урана. В соответствующие обсерватории они разослали письма, в которых говорилось: «Господа, направьте свои телескопы в такое-то место — и вы увидите там новую планету». Обратят ли на вас внимание или нет, часто зависит от того, с кем вы работаете. На Леверрье обратили внимание, послушались его и обнаружили планету N! Тогда и другая обсерватория поспешила начать наблюдения — и дело увенчалось успехом.

Это открытие показывает, что в солнечной системе законы Ньютона абсолютно верны. Но верны ли они на расстояниях, больших, чем относительно малые расстояния до планет? Во-первых, можно поставить вопрос: притягивают ли *звезды друг друга* так же, как планеты? Положительные доказательства этого мы находим в *двойных звездах*. На фиг. 7.6 показана двойная звезда — две близкие звезды (третья звезда нужна, чтобы убедиться, что фотография не перевернута); вторая фотография сделана через несколько лет. Сравнивая с «фиксированной» звездой, мы видим, что ось пары повернулась, т. е. звезды ходят одна вокруг другой. Вращаются ли они в согласии с законами Ньютона? Тщательные замеры относительной позиции двойной звезды Сириус даны на фиг. 7.7. Получается превосходный эллипс (измерения начаты в 1862 г. и доведены до 1904 г.; с тех пор был сделан еще один оборот). Все сходится с законами Ньютона, кроме того, что Сириус А получается *не в фокусе*. В чем же дело? А в том, что плоскость эллипса не совпадает с «плоскостью неба». Мы видим Сириус не под прямым углом к плоскости его орбиты, а если на эллипс посмотреть сбоку, то он



Фиг. 7.7. Орбита Сириуса В по отношению к Сириусу А.

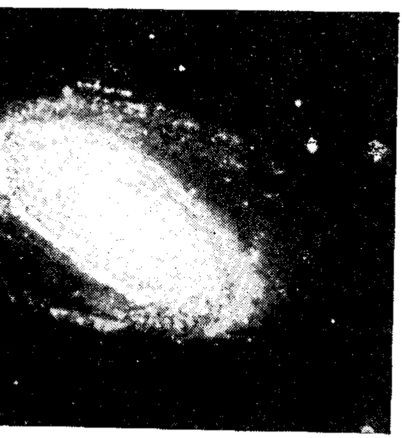


Фиг. 7.8. Шаровое звездное скопление.

не перестанет быть эллипсом, но фокус может сместиться. Так что и двойные звезды можно анализировать в согласии с требованиями закона тяготения.

Справедливость закона тяготения на бо́льших дистанциях видна из фиг. 7.8. Нужно быть лишенным воображения, чтобы не увидеть здесь работы тяготения. Здесь показано одно из красивейших небесных зрелищ — шаровое звездное скопление. Каждая точка — это звезда. Нам кажется, будто у центра они набиты вплотную; происходит это из-за слабой чувствительности телескопа; на самом деле промежутки между звездами даже в середине очень велики, а столкновения крайне редки. Больше всего звезд в центре, а по мере удаления к краю их все меньше и меньше. Ясно, что между звездами действует притяжение, т. е. что тяготение существует и на таких гигантских расстояниях (порядка 100 000 диаметров солнечной системы).

Но отправимся дальше и рассмотрим *всю галактику* (фиг. 7.9). Форма ее явственно указывает на стремление ее вещества стянуться. Конечно, доказать, что здесь действует закон обратных квадратов, нельзя; видно только, что и на таком протяжении есть силы, удерживающие всю галактику от развала. Вы можете сказать: «Ладно, все это разумно, но почему же эта штука, галактика, уже не похожа на шар?» Да потому, что она *вер-*



Фиг. 7.9. Галактика.

Фиг. 7.10. Облако галактик.

тится, что у нее есть *момент количества движения* (запас вращения); если она сожмется, ей некуда будет его девать; ей остается только сплюснуться. (Кстати, вот вам хорошая задача: как образуются рукава галактики? Чем определяется ее форма? Детального ответа на эти вопросы еще нет.) Ясно, что очертания галактики определяются тяготением, хотя сложности ее структуры пока невозможно полностью объяснить. Размеры галактик — около 50 000—100 000 световых лет (Земля находится на расстоянии $8^1/_3$ световых минут от Солнца).

Но тяготение проявляется и на бóльших протяжениях. На фиг. 7.10 показаны какие-то скопления мелких пятен. Это *облако галактик*, подобное звездному скоплению. Стало быть, и галактики притягиваются между собой на таких расстояниях, иначе бы они не собрались в «облако». По-видимому, и на расстояниях в *десятки миллионов* световых лет проявляется тяготение; насколько ныне известно, всюду все еще действует закон обратных квадратов.

Закон тяготения ведет не только к пониманию природы туманностей, но и к некоторым идеям о происхождении звезд. В большом облаке пыли и газа, подобном изображенному на фиг. 7.11, притяжение частиц пыли соберет их в комки. На фигуре видны

Фиг. 7.11. Межзвездное пылевое облако.

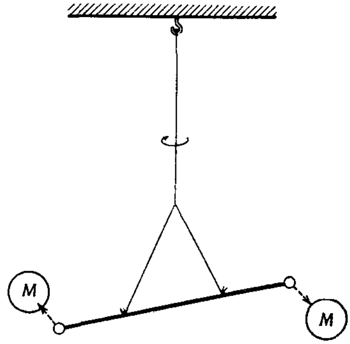
Фиг. 7.12. Образование новых звезд?

«маленькие» черные пятнышки — быть может, начало скопления газа и пыли, из которых благодаря их притяжению начинает возникать звезда. Приходилось ли нам когда-либо видеть рождение звезды — вопрос спорный. На фиг. 7.12 дано некоторое свидетельство того, что приходилось. Слева показан светящийся газ, а внутри него — несколько звезд. Это снимок 1947 г. Снимок справа сделан через 7 лет; теперь видны уже два новых ярких пятна. Уж не скопился ли здесь газ, не вынудило ли его тяготение собраться в шар, достаточно большой, чтобы в нем началась звездная ядерная реакция, превращая его в звезду? Может быть, да, а может, и нет. Маловероятно, что нам повезло увидеть, как всего за семь лет звезда стала видимой, но еще менее вероятно увидать рождение сразу *двух* звезд.

§ 6. *Опыт Кавендиша*

Итак, тяготение распространяется на огромные расстояния. Но если существует притяжение между *любыми* двумя объектами, то должна существовать и возможность измерить силу, действующую между ними. И не обязательно следить за движением звезд; почему бы не взять два шара, свинцовый и мраморный, и не проследить, как один будет двигаться к другому? Трудность столь простого по идее опыта заключается в крайней слабости, незаметности сил. Проводить его следует с исключительной осторожностью: сначала выкачать из аппарата воздух, убедиться, что нигде нет электрических зарядов и т. д., и только тогда можно попытаться измерить силу. Впервые она была измерена Кавендишем при помощи устройства, схематически изображенного на фиг. 7.13. Опыт Кавендиша доказал, что существует сила, действующая между двумя большими закрепленными свинцовыми шарами и двумя меньшими (тоже из свинца); в опыте шары размещались на концах коромысла, висящего на очень тонкой упругой нити. Измеряя, насколько закрутится нить, можно было узнать величину силы и убедиться, что она обрат-

Фиг. 7.13. Упрощенная схема прибора, использованного Кавендишем для проверки закона всемирного тяготения для малых тел и измерения постоянной тяготения G.



но пропорциональна квадрату расстояния. Таким образом точно определялся коэффициент G в формуле

$$F = G\frac{mm'}{r^2},$$

ибо все массы и расстояния здесь известны. Вы можете возразить: «Все это для Земли было известно и раньше». Все, кроме *массы* Земли. Определив из этого опыта величину G и зная силу притяжения Земли, можно было косвенно определить ее массу! Опыт поэтому называют «взвешиванием Земли». Кавендиш утверждал, что он взвесил Землю, хотя он только измерил коэффициент G; но это единственный способ определить массу Земли. Коэффициент G оказался равным

$$6{,}670 \cdot 10^{-11}\ \textit{ньютон} \cdot \textit{м}^2/\textit{кг}^2.$$

Трудно преувеличить силу влияния теории тяготения, ее величественных успехов на историю науки. Вместо царивших в прежние века неуверенности, сомнений, неполноты знаний, бесконечных споров и парадоксов перед людьми предстал новый закон во всей своей четкости и простоте. Как важно было то, что все луны, все планеты, все звезды подчиняются столь *простому правилу*! Но еще важнее то, что человек оказался в состоянии *понять* это правило и предсказывать на будущее пути планет! Это определило быстрый, успешный рост науки в последующие годы; у людей появилась надежда, что и в других явлениях мира прячутся такие же простые закономерности.

§ 7. *Что такое тяготение?*

Но почему закон так прост? Что можно сказать о причине этого? До сих пор мы только описывали, *как* Земля обращается вокруг Солнца, но ни слова не сказали о том, *что́ заставляет ее двигаться*. Ньютон не строил догадок об этом; ему было достаточно открыть, *что́* происходит, не входя в механизм происходящего. *Но и никто другой с тех пор никакого механизма* *не открыл.* Все физические законы отличаются в этом отношении своим абстрактным характером. Закон сохранения энергии — это теорема о величинах, которые нужно вычислить и сложить, не думая о причине этого; точно так же и великие законы механики представляют собой количественные математические закономерности, о внутреннем механизме работы которых никаких данных нет. Почему мы можем пользоваться математикой для описания законов, не зная их причины? Никто и этого не знает. Мы продолжаем идти по этой дороге, потому что на ней все еще происходят открытия.

Предлагались многие механизмы тяготения. Интересно рассмотреть один из них, ибо до него время от времени додумывались то один, то другой ученый. Причем каждый сперва воспрянет духом и ходит осчастливленный своим «открытием», но потом начинает понимать, что тут что-то не так. Впервые это открытие произошло примерно в 1750 г. Представьте себе, что в пространстве носится в разных направлениях с огромной скоростью множество частиц, лишь слегка поглощаемых веществом. Поглощаясь, они передают свой импульс Земле. Но так как во всех направлениях их количество одинаково, то все импульсы уравновешиваются. Когда же неподалеку находится Солнце, то частицы, приближающиеся к Земле сквозь Солнце, частично им поглощаются, так что от Солнца их проходит меньше, чем с обратной стороны. Следовательно, Земля ощутит импульс, направленный к Солнцу, и нетрудно видеть, что он будет обратным квадрату расстояния: таков закон изменения пространственного угла, под которым видимо Солнце, с ростом расстояния. Что же плохо в этом механизме? Неверны те выводы, которые из него следуют. Появляется новая забота: Земля в своем движении вокруг Солнца будет испытывать больше столкновений с частицами спереди, чем сзади (когда бежишь навстречу дождю, лицо мокнет больше, чем затылок!). Поэтому спереди Земля получит больше импульсов, чем сзади, и должна почувствовать *сопротивление своему движению*, а это сказалось бы на замедлении ее движения по орбите. Можно подсчитать, сколько времени понадобится Земле, чтобы в результате такого сопротивления остановиться; оказывается, не так уж много; а раз Земля все же движется по своей орбите, то вся эта механика не годится. И не было предложено ни одного механизма, «объясняющего» тяготение, который бы не предсказывал добавочных, *несуществующих* явлений.

Рассмотрим еще возможную связь тяготения с прочими силами. В нынешнее время не удается свести тяготение к другим силам. Тяготение отнюдь не проявление электричества или чего-либо подобного; этим его не объяснишь. И все же тяготение похоже на другие силы, и любопытно посмотреть, в чем. К примеру, электрическая сила между двумя заряженными телами

$$\frac{\text{Гравитационное притяжение}}{\text{Электрическое отталкивание}} = \frac{1}{4{,}17\cdot 10^{42}} =$$

$$= 1/4\ 170\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000$$

Фиг. 7.14. Относительная сила электрического и гравитационного взаимодействия двух электронов.

чрезвычайно похожа на тяготение: она равна со знаком минус постоянной величине, умноженной на величины зарядов тел, и изменяется обратно квадрату расстояния. Правда, она действует в обратную сторону, т. е. отталкивает. Но замечательно не столько это, сколько одинаковая зависимость от расстояния, входящая в оба закона. Не исключено, что тяготение и электричество связаны значительно сильнее, чем мы думаем. Было сделано много попыток объединить их; так называемая единая теория поля — лишь одна из очень изящных попыток сочетать электричество с тяготением. Но самая интересная вещь в сопоставлении их друг с другом — это *относительная величина* этих сил. Любая теория, в которой появятся обе силы, обязана будет также объяснить величину тяготения (константу G).

Если мы измерим в естественных единицах отталкивание двух электронов (возникающее из-за того, что у них есть заряд) и их притяжение (возникающее оттого, что у них есть масса), то мы можем получить и отношение электрического отталкивания к гравитационному притяжению. Отношение это не зависит от расстояния, это фундаментальная мировая константа. Изображена она на фиг. 7.14. Гравитационное притяжение составляет $1/4{,}17\cdot 10^{42}$ от электрического отталкивания! Откуда же может возникнуть такое исполинское число в знаменателе? Оно же не случайно, ведь это не отношение объема Земли к объему тли. Мы рассматриваем два естественных свойства одного и того же предмета — электрона. Это фантастическое число есть естественная константа, и в нем таятся какие-то глубинные свойства природы. От каких же свойств оно зависит? Некоторые надеются, что если кто-нибудь однажды напишет «универсальное уравнение», то одним из его корней будет это число. Но очень трудно найти уравнение, в котором корнем было бы такое немыслимое число. Были придуманы и другие возможности; одна связывает его с возрастом Вселенной. Иначе говоря, необходимо найти в природе *еще* одно такое огромное число. При этом не собираются выражать возраст в *годах*, нет, ведь год — не «естественная» величина, она введена людьми.

Как пример чего-то естественного выберем время, за какое свет проходит сквозь протон, 10^{-24} *сек*. Разделив это число на возраст Вселенной ($2 \cdot 10^{10}$ лет, $\approx 10^{18}$ *сек*), получим 10^{-42} — число со столькими же нулями; потому и предлагают считать постоянную всемирного тяготения связанной с возрастом всего мира. Если бы это было так, то она изменялась бы со временем: по мере старения Вселенной отношение ее лет к промежутку, в течение которого свет проносится мимо протона, возрастало бы. Возможно ли, что постоянная тяготения и впрямь меняется с годами? Ясно, что изменения столь малы, что в этом убедиться нелегко.

Вот один из способов проверить эту мысль. Зададим вопрос: что при этом должно было измениться за последние 10^9 лет (время появления жизни на Земле), т. е. за $^1/_{10}$ возраста Вселенной? За это время постоянная тяготения выросла бы на 10%. Оказывается, что если рассмотреть структуру Солнца — баланс между его массой и степенью генерации излучательной энергии внутри Солнца,— то при росте тяжести на 10% Солнце оказалось бы не на 10% ярче, а значительно больше: яркость его возросла бы как *шестая степень* постоянной тяготения! Можно подсчитать и то, на сколько при таком изменении тяжести Земля приблизится к Солнцу. В итоге выясняется, что Земля стала бы более чем на 100° горячее и, следовательно, вся вода из морей превратилась бы в пар. Поэтому мы сейчас *не верим*, что постоянная тяготения изменяется по мере того, как мир стареет. Все же приведенный нами аргумент не очень убедителен, и вопрос до конца не выяснен.

Как известно, сила тяготения пропорциональна массе, т. е. мере *инерции* тела, или мере того, насколько трудно удержать тело, вращающееся по кругу. Поэтому два тела, тяжелое и легкое, движущиеся бок о бок вокруг массивного тела по одному и тому же кругу с одной скоростью под действием тяготения, будут все время оставаться рядом, потому что движение по кругу *требует* для большего тела и большей силы. Иначе говоря, тяжесть у большей массы больше *как раз в нужной пропорции*, так что два тела будут вращаться, не удаляясь одно от другого. Если же одно тело находится внутри другого, то оно и *останется* там; равновесие является совершенным. Поэтому Гагарин и Титов наблюдали невесомость всех предметов внутри космического корабля; выпущенный из руки карандаш, например, вращался вокруг Земли по той же траектории, что и весь корабль, поэтому он замирал, повиснув в воздухе. Любопытно, что эта сила *в точности* пропорциональна массе; если бы это было не так, то должны были бы наблюдаться явления, в которых инерция и вес отличаются. Отсутствие подобных явлений было с огромной точностью проверено на опыте, выполненном впервые

Этвешем в 1909 г., а позже повторенном Дикке. У всех веществ масса и вес пропорциональны с точностью 1/1 000 000 000 или даже более того. Не правда ли, замечательный эксперимент?

§ 8. *Тяготение и относительность*

Заслуживает еще обсуждения видоизменение ньютонова закона тяготения, сделанное Эйнштейном. Оказывается, несмотря на вызванное им воодушевление, ньютонов закон тяготения все же неверен! Учтя требования теории относительности, Эйнштейн видоизменил этот закон. Согласно Ньютону, тяготение действовало мгновенно. Это значит вот что: сдвинув массу, мы должны в тот же миг почувствовать изменение силы в результате смещения; стало быть, таким способом можно посылать сигналы с бесконечной скоростью. А Эйнштейн выдвинул доводы, что *невозможно посылать сигналы быстрее скорости света*; закон тяготения, таким образом, должен быть ошибочным. Если исправить его, учтя запаздывание, то получится уже новый закон, закон тяготения Эйнштейна. Одна из особенностей нового закона легко укладывается в голове: по теории относительности Эйнштейна все, любой объект, обладающий энергией, обладает и массой в том смысле, что он должен тяготеть к другим объектам. Даже световой луч имеет «массу», ибо он обладает энергией. И когда луч света, неся с собой энергию, проходит мимо Солнца, то Солнце его притягивает. И луч уже идет не по прямой, а искривляется. Например, во время солнечных затмений звезды, окружающие Солнце, кажутся сдвинутыми с того места, где они наблюдались бы, если бы Солнца не было. И это явление и впрямь наблюдалось.

И наконец, сопоставим тяготение с другими теориями. В последние годы выяснилось, что любая масса обязана своим происхождением мельчайшим частицам и что существует несколько видов взаимодействия, например ядерные силы и т. п. Ни одна из этих ядерных или электрических сил пока тяготения не объясняет. Квантовомеханические стороны природы мы еще пока не распространили на тяготение. Когда на малых расстояниях начинаются квантовые эффекты, то тяготение оказывается еще настолько слабым, что нужды в квантовой теории тяготения не возникает. С другой стороны, для последовательности наших физических теорий было бы важно понять, должен ли закон Ньютона с внесенным Эйнштейном видоизменением быть изменен и дальше с тем, чтобы согласовываться с принципом неопределенности. Это последнее видоизменение пока не сделано.

Глава 8

ДВИЖЕНИЕ

§ 1. Описание движения

Чтобы найти законы, управляющие различными изменениями, происходящими с течением времени, нужно сначала *описать* эти изменения и придумать какой-то способ их записи. Начнем с самого простого изменения, которое происходит с телом,— с изменения его положения в пространстве, т. е. то, что мы называем *движением*. Рассмотрим движущийся предмет, на который нанесена маленькая отметка; ее мы будем называть точкой. Неважно, будет ли это кончик радиатора автомобиля или центр падающего шара. Мы будем пытаться описать тот факт, что она движется и как это происходит.

На первый взгляд это кажется совсем просто, однако в описании изменения есть много хитростей. Некоторые изменения описать труднее, нежели движение точки на твердом предмете. Например, как описать движение облака, которое не только медленно перемещается, но вдобавок еще изменяет свои очертания или испаряется? Или как описать капризы женского ума? Впрочем, поскольку изменения облака хотя бы в принципе можно описать с помощью движения всех отдельных молекул его составляющих, то вполне возможно, что и изменения мыслей обусловлены тоже какими-то перемещениями атомов в мозгу, хотя мы еще не знаем простого способа их описания.

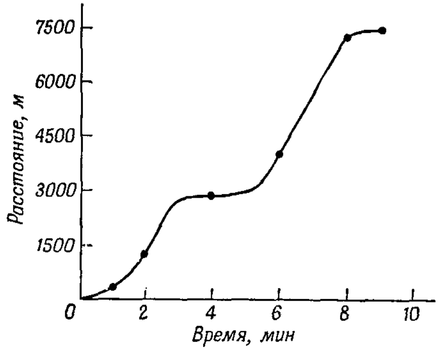
По этой причине мы начнем с движения точек. Пожалуй, еще можно считать эти точки атомами, но сначала, вероятно, лучше не гнаться за точностью, а просто представлять себе точку как какой-то маленький объект, маленький по сравнению с тем расстоянием, которое он проходит. Например, если говорят об автомобиле, прошедшем 100 *км*, то какая разница, имеется ли в виду его мотор или багажник. Конечно, небольшая разница есть, но обычно мы просто говорим «автомобиль», и то, что он не является абсолютной точкой, не имеет значения. Для наших целей не нужна абсолютная точность. Ради простоты забудем на время также и о том, что наш мир трехмерный, а сконцентрируем все свое внимание на движении в одном направлении (автомобиль движется по прямой дороге). Мы еще вернемся к понятию трех измерений, когда поймем, как описывается движение в одном измерении. Вы, вероятно, скажете, что это тривиально. Действительно, это так. Как описать движение в одном измерении, скажем движение автомобиля. Это проще простого. Приведу один из многих возможных способов. Чтобы определить положение автомобиля в различные моменты времени, мы измеряем расстояние его от начальной точки и записываем наши наблюдения. В табл. 8.1 буква s означает расстояние автомобиля от начальной точки в метрах, а t — время в минутах. Первая строка — нулевое расстояние и нулевой момент

Таблица 8.1 • РАСПИСАНИЕ ДВИЖЕНИЯ АВТОМОБИЛЯ

t, *мин*	s, *м*	t, *мин*	s, *м*
0	0	5	3150
1	380	6	4050
2	1350	7	5550
3	2550	8	7050
4	2850	9	7500

времени. Автомобиль еще не начал двигаться. Через минуту после начала движения он проходит уже 380 *м*. Через две минуты он продолжает двигаться. Заметьте, что за вторую минуту он прошел большее расстояние, чем за первую,— автомобиль ускоряет свое движение, но между третьей и четвертой минутами что-то произошло, более того, на пятой минуте он остановился. По-видимому, у светофора, потому что дальше он опять набирает скорость и к концу шестой минуты проходит 4050 *м*, к концу седьмой — 5550, а к концу восьмой — 7050. Но в течение девятой минуты опять происшествие — автомобиль прошел всего лишь 450 *м* и остановился. Водитель нарушил правила движения и был остановлен полицейским.

Это один способ описать движение. Есть и другой способ — графический. Если по горизонтали откладывать время, а по вертикали — расстояние, то получим кривую, подобную изображенной на фиг. 8.1. Из рисунка видно, что с увеличением времени расстояние тоже увеличивается, сначала очень медленно,



Фиг. 8.1. График зависимости расстояния, пройденного машиной, от времени.

а затем все быстрее и быстрее. В районе четырех минут происходит замедление, а затем расстояние опять увеличивается в течение нескольких минут, и, наконец, на девятой минуте машина останавливается. Все эти сведения можно получить прямо из графика, не используя таблицы. Конечно, для построения нашего графика необходимо знать, где находится автомобиль не только каждую минуту, но и каждые полминуты, а может быть, и еще точнее. Кроме того, мы предполагаем, что машина где-то находится в любой момент времени.

Так что движение автомобиля выглядит все же сложно. Давайте рассмотрим что-нибудь попроще, с более простым законом движения: например, падающий шар. В табл. 8.2 даны значения

Таблица 8.2 • РАСПИСАНИЕ ДВИЖЕНИЯ ПАДАЮЩЕГО ШАРА

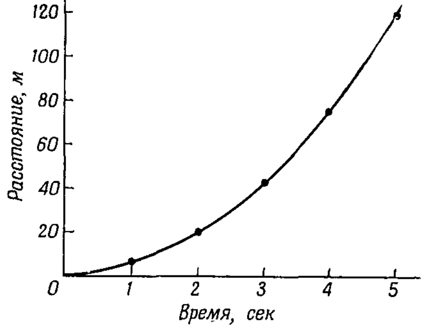
t, *сек*	s, *м*
0	0
1	5
2	20
3	45
4	80
5	125
6	180

времени в секундах и расстояния в метрах. За нулевой момент выберем момент начала падения. Через 1 *сек* после начала падения шарик пролетает 5 *м*, через 2 *сек* — 20 *м*, через 3 *сек* — 45 *м*. Если отложить эти числа на графике, то получим параболическую кривую зависимости расстояния от времени для падающего тела (фиг. 8.2), которая описывается формулой

$$s = 5t^2. \qquad (8.1)$$

Эта формула позволяет вычислить расстояние для любого момента времени. Вы скажете, что для первого графика

Фиг. 8.2. *График зависимости расстояния, пройденного падающим шаром, от времени.*



(см. фиг. 8.1) тоже должна быть какая-то формула. Действительно это так. Ее можно записать в таком абстрактном виде:

$$s = f(t). \qquad (8.2)$$

Это означает, что s — величина, зависящая от t, или, как говорят математики, s есть функция t. Однако мы не знаем, что это за функция, точнее, мы не можем записать ее через какие-то известные нам функции.

На этих двух примерах видно, что любое движение можно описать в общей и простой форме. Казалось бы, нет ничего хитрого! Однако хитрости все же есть, и не одна! Во-первых, что мы понимаем под *пространством* и *временем*? Это, оказывается, очень глубокие философские вопросы, которые нужно внимательно проанализировать, что не так-то легко. Теория относительности показывает, что понятия пространства и времени не так просты, как это кажется на первый взгляд. Впрочем, сейчас для начала нам не нужна такая скрупулезность в определении этих понятий. Возможно, вы скажете: «Странно, мне всегда говорили, что в науке *все* должно определяться точно». Это не так. Мы не можем определить точно все без исключения! Если бы мы пытались это сделать, то получилось бы нечто похожее на спор двух «философов», где один говорит: «Вы сами не знаете, о чем говорите»; а второй отвечает: «А что такое «знать»? Что такое «говорить»? Что такое «вы», наконец?» Ну и так до бесконечности. Так что для пользы дела лучше сначала условиться, что мы будем говорить хотя бы приблизительно об одних и тех же вещах. Сейчас вы достаточно много знаете о времени, но помните, что здесь есть некоторые тонкости, которые мы еще обсудим в дальнейшем.

Другая хитрость (мы уже упоминали о ней) — это правильно ли думать, что наблюдаемая нами движущаяся точка всегда находится в каком-то определенном месте (т. е. где-то локализована). Разумеется, когда мы смотрим на нее, она находится в определенном месте; но можно ли это утверждать в те моменты, когда мы отвернулись. И вот оказывается, что при изучении движения атомов так думать нельзя. Невозможно посадить метку на атом и наблюдать за его движением. С этой тонкостью мы вплотную столкнемся в квантовой механике. Но сначала давайте рассмотрим те проблемы, которые возникают до введения этих усложнений, а уж после этого учтем те поправки, на которые нас вынуждают новейшие сведения о природе вещей. Итак, примем наиболее простую точку зрения о пространстве и времени. Мы приблизительно понимаем, что означают эти понятия, а тот, кому доводилось управлять автомобилем, знает и что такое скорость.

§ 2. Скорость

Хотя мы примерно представляем себе, что такое «скорость», однако здесь есть одна очень важная тонкость. Заметьте, что древние греки так и не смогли до конца разобраться в проблеме скорости. Тонкость, о которой идет речь, дает себя знать, когда пытаешься точно определить, что же подразумевается под понятием «скорость». Этот вопрос был камнем преткновения для древних греков, и потребовалось открытие новой области математики, помимо геометрии и алгебры, которые были известны и грекам, и арабам, и вавилонянам. Попробуйте-ка с помощью одной лишь алгебры решить следующую задачу. Воздушный шар надувается таким образом, что его объем увеличивается со скоростью 100 *см*^{3}/*сек*. С какой скоростью увеличивается его радиус, когда объем шара достигает 1000 *см*^{3}? Задачи такого рода были неразрешимы для древних греков. Кроме того, их сбивали с толку многочисленные «парадоксы». Вот один из них, придуманный Зеноном, который хорошо показывает, насколько была сложна в то время проблема скорости движения. «Предположим,— говорит он, — что Ахиллес бегает в десять раз быстрее черепахи. Но тем не менее он никогда не перегонит ее. Действительно, пусть в начале состязания черепаха находилась в 100 метрах впереди Ахиллеса. Тогда ко времени, когда Ахиллес пробежит эти 100 метров, черепаха окажется в 10 метрах впереди него. Пробежав и эти 10 метров, Ахиллес увидит черепаху в 1 метре впереди себя. За то время, пока он пробежит этот метр, черепаха пройдет 10 сантиметров и так далее ... до бесконечности. Следовательно, в любой момент черепаха будет впереди Ахиллеса, и он никогда не сможет перегнать ее». В чем здесь ошибка? Конечный интервал времени можно разделить на бесконечное число частей точно так же, как и конечный отрезок длины, если последовательно делить его пополам. Но бесконечное число этапов до того места, где Ахиллес поравняется с черепахой, вовсе не означает бесконечное количество *времени*. Этот пример хорошо показывает, с какими трудностями приходилось сталкиваться в проблеме определения скорости.

Чтобы еще яснее представить себе эти трудности, вспомним старую шутку, которую вы наверняка слышали. Вы помните, что автомобиль, о котором мы говорили в начале этой лекции, был остановлен полицейским. Он подходит к машине и говорит: «Мадам (ибо за рулем была женщина), Вы нарушили правила уличного движения. Вы ехали со скоростью 90 километров в час». Женщина отвечает: «Простите, это невозможно. Как я могла делать 90 километров в час, если я еду всего лишь 7 минут!» Как бы вы ответили на месте полицейского? Конечно, если вы действительно настоящий полицейский, то такими хитростями вас не запутаешь. Вы бы твердо сказали: «Мадам, оправдываться будете перед судьей!» Но предположим, что у вас нет такого выхода. Вы хотите честно доказать нарушительнице ее вину и пытаетесь объяснить ей, что означает скорость 90 *км/час*. Как это сделать? Вы скажете: «Я имел в виду, мадам, что если бы вы продолжали ехать таким же образом, то через час Вы бы проехали 90 километров». «Да, но я ведь затормозила и остановила машину,— может ответить она,— так что теперь-то я уж никак не могла бы проехать 90 километров в час».

Аналогичная проблема возникает и в случае падающего шарика. Предположим, что мы хотим определить его скорость через 3 *сек*, если бы он двигался таким же образом. Но что означает «двигался таким же образом»? Сохранял бы ускорение, двигался быстрее, что ли? Конечно, нет! Сохранял бы ту же самую *скорость*. Но ведь это как раз то, что мы пытаемся определить! Если бы шарик продолжал двигаться «таким же образом», то он падал бы так же, как падает. Так что нужно придумать что-то лучшее для определения скорости. Что же все-таки должно сохраняться? Нарушительница могла бы вам еще ответить и так: «Если бы я продолжала ехать, как ехала, еще час, то налетела бы на стену в конце улицы!» В общем, как видите, полицейский оказался бы в очень трудном положении, пытаясь объяснить, что он имел в виду.

Многие физики думают, что единственным определением любого понятия является способ его измерения. Но тогда при объяснении вы должны прибегнуть к прибору, измеряющему скорость. «Смотрите,— скажете вы в этом случае,— ваш спидометр показывает 60». «Мой спидометр сломан и давно не работает»,— ответит она. Но достаточно ли этого, чтобы поверить, что машина не двигалась? Мы полагаем, что как-то нужно было бы определять скорость и без помощи спидометра. Только при этих условиях можно сказать, что спидометр не работает, что он сломан. Это было бы абсурдным, если бы скорость не имела смысла без спидометра. Очевидно, что понятие «скорость» не зависит от спидометра. Спидометр нужен только для того, чтобы измерять ее. Давайте посмотрим, нельзя ли придумать лучшее определение понятия «скорость». Вы скажете: «Разумеется, мадам, если бы вы ехали таким же образом в течение часа, то налетели бы на стену, но за 1 секунду вы бы проехали 25 метров, так что вы делали 25 метров в секунду, и если бы продолжали ехать таким же образом, то в следующую секунду опять проехали бы 25 метров, а стена стоит гораздо дальше». «Но правила запрещают делать 90 километров в час, а не 25 метров в секунду». «Да ведь это то же самое, что и 90 километров в час»,— ответите вы. А если это то же самое, то к чему тогда все длинные разговоры о 25 *м/сек*? В действительности же падающий шар не может двигаться одинаковым образом даже 1 *сек*, так как он постоянно ускоряется, и, следовательно, нужно определить скорость как-то точнее.

Но теперь мы, кажется, находимся на правильном пути, который приводит нас вот к чему. Если бы машина продолжала двигаться таким же образом следующую тысячную долю часа, то она прошла бы тысячную долю 90 *км*. Другими словами, нет никакой необходимости ехать целый час с той же быстротой, достаточно какого-то *момента*. Это означает, что за какой-то момент времени машина проходит такое же расстояние, как я идущая с постоянной скоростью 90 *км/час*. Наши рассуждении о 25 *м/сек*, возможно, и правильные; мы отмечаем, сколько машина прошла в следующую секунду, и если получается расстояние 25 *м*, то это означает, что скорость достигает 90 *км/час*.

Другими словами, можно определить скорость следующим образом. Определяем расстояние, которое было пройдено за очень малый отрезок времени, и, разделив его на этот отрезок времени, получаем скорость. Однако этот отрезок должен быть как можно меньше, и чем меньше, тем лучше, потому что в этот период могут произойти снова изменения. Смешно, например, для падающего тела в качестве такого отрезка принять час. Принять в качестве отрезка секунду, может быть, удобно для автомобиля, так как за секунду его скорость изменяется не слишком сильно, но этот отрезок велик для падающего тела. Таким образом, чтобы вычислить скорость более точно, нужно брать все меньшие и меньшие интервалы времени. Если на миллионную долю секунды мы разделим расстояние, которое было пройдено в течение этого времени, то получим расстояние в секунду, т. е. как раз то, что мы понимаем под скоростью. Именно это нужно было сказать нашей нарушительнице, т. е. дать то определение скорости, которое мы и будем использовать.

Такое определение содержит некую новую идею, которая была недоступна грекам в ее общей форме.

Она заключается в том, чтобы *малые* расстояния разделить на соответствующие *малые* отрезки времени и посмотреть, что́ произойдет с частным, если отрезок времени брать все меньше и меньше (иными словами, брать предел отношения пройденного расстояния к интервалу времени при неограниченном уменьшении последнего). Впервые эта идея была высказана независимо Ньютоном и Лейбницем и явилась основой новой области математики — *дифференциального исчисления.* Оно возникло в связи с описанием движения, и первым его приложением был ответ на вопрос: «Что означает 90 *км/час*?»

Попытаемся теперь точнее определить скорость. Пусть за некоторое малое время ε машина или какое-то другое тело прошли малое расстояние x; тогда скорость v определяется как

$$v = \frac{x}{\varepsilon},$$

причем точность будет тем больше, чем меньше ε. Математики записывают это следующим образом:

$$v = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{x}{\varepsilon}, \tag{8.3}$$

т. е. скорость есть предел отношения x/ε при ε, стремящемся к нулю. Для нашей машины-нарушительницы невозможно точно вычислить скорость, так как таблица неполная. Ее положение известно нам только через интервалы 1 *мин*. Приближенно, конечно, можно сказать, что в течение седьмой минуты, например, она шла со средней скоростью 90 *км/час*, однако о ее скорости в конце шестой минуты ничего сказать невозможно. Может быть, она ускорялась и скорость с 40 *км/час* в начале шестой минуты возросла до 90 *км/час* в конце ее, а может быть, она двигалась иначе. Мы не знаем этого точно, так как у нас нет детальной записи ее движения между шестой и седьмой минутами. Только когда таблица будет пополнена бесконечным числом данных, из нее можно будет действительно вычислить скорость. Если, однако, нам известна полная математическая формула, как, например, в случае падающего тела [уравнение (8.1)], то можно подсчитать скорость. Ведь по формуле можно найти положение тела в любой момент времени.

В качестве примера давайте найдем скорость падающего шара через 5 *сек* после начала падения. Один способ — это посмотреть по табл. 8.2, что происходило с шариком на пятой секунде. В течение этой секунды он прошел 45 *м*, так что, казалось бы, он падал со скоростью 45 *м/сек*. Однако это неверно, поскольку скорость его все время изменялась. Конечно, *в среднем* в течение этой секунды она составляла 45 *м/сек*, но в действительности шар ускорялся и в конце пятой секунды падал быстрее 45 *м/сек*. Наша задача состоит в том, чтобы определить *скорость точно*. Сделаем это следующим образом. Нам известно, где шарик находился через 5 *сек*. За 5 *сек* он прошел расстояние 125 *м*. К моменту 5,1 *сек* общее расстояние, которое прошел шарик, составит, согласно уравнению (8.1), 130,05 *м*. Таким образом, за дополнительную десятую долю секунды он проходит 5,05 *м*. А поскольку 5,05 *м* за 0,1 *сек* то же самое, что и 50,5 *м/сек*, то это и будет его скорость. Однако это все еще не совсем точно. Для нас совершенно неважно, будет ли это скорость в момент 5 *сек*, или в момент 5,1 *сек*, или где-то посредине. Наша задача вычислить скорость *точно через* 5 *сек*, а этого мы пока не сделали. Придется улучшить точность и взять теперь на тысячную долю больше 5 *сек*, т. е. момент 5,001 *сек*. Полное расстояние, пройденное за это время, составляет

$$s = 5 \cdot 5{,}001^2 = 5 \cdot 25{,}010001 = 125{,}050005\ м.$$

Следовательно, в последнюю тысячную долю секунды шарик проходит 0,050005 *м*, и если разделить это число на 0,001 *сек*, то получим скорость 50,005 *м/сек*. Это уже очень близко, но все же еще *не точно*. Однако теперь уже ясно, как поступить, чтобы найти скорость точно. Удобнее решать эту задачу в несколько более общем виде. Пусть требуется найти скорость в некоторый момент времени t_0 (например, 5 *сек*). Расстояние, которое пройдено к моменту t_0 (назовем его s_0), будет $5t_0^2$ (в нашем случае 125 *м*). Чтобы определить расстояние, мы задавали вопрос: где окажется тело спустя время t_0 + (небольшой добавок), или $t_0+\varepsilon$? Новое положение тела будет $5(t_0+\varepsilon)^2=5t_0^2+10t_0\varepsilon+5\varepsilon^2$. (Это расстояние больше того расстояния, которое шарик прошел за t_0 *сек*, т. е. больше $5t_0^2$.) Назовем это расстояние s_0 + (небольшой добавок), или s_0+x. Если теперь вычесть из него расстояние, пройденное к моменту t_0, то получим x — то дополнительное расстояние, которое шарик прошел за добавочное время ε, т. е. $x=10t_0\varepsilon+5\varepsilon^2$. Так что в первом приближении скорость будет равна

$$v = \frac{x}{\varepsilon} = 10\,t_0 + 5\varepsilon. \tag{8.4}$$

Теперь мы уже знаем, что нужно делать, чтобы получить скорость точно в момент t_0: нужно брать отрезок ε все меньше и меньше, т. е. устремлять его к нулю. Таким путем из уравнения (8.4) получим

$$v\ (\text{в момент } t_0) = 10t_0.$$

В нашей задаче $t_0=5$ *сек*, следовательно, скорость равна $v=10\cdot 5=50$ *м/сек*. Это и есть нужный ответ. Раньше, когда ε бралось равным 0,1 и 0,001 *сек*, получалась несколько бóльшая величина, чем 50 *м/сек*, но теперь мы видим, что в действительности она в точности равна 50 *м/сек*.

§ 3. Скорость как производная

Процедура, которую мы только что выполнили, настолько часто встречается в математике, что для величин ε и x было придумано специальное обозначение: ε обозначается как Δt, а x — как Δs. Величина Δt означает «небольшой добавок к t», причем подразумевается, что этот добавок можно делать меньше. Значок Δ ни в коем случае не означает умножение на какую-то величину, точно так же как $\sin\theta$ не означает $s\cdot i\cdot n\cdot\theta$. Это просто некоторый добавок ко времени, причем значок Δ напоминает нам о его особом характере. Ну, а если Δ не множитель, то его нельзя сократить в отношении $\Delta s/\Delta t$. Это все равно, что в выражении $\sin\theta/\sin 2\theta$ сократить все буквы и получить $^1/_2$. В этих новых обозначениях скорость равна пределу отношения $\Delta s/\Delta t$ при Δt, стремящемся к нулю, т. е.

$$v=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}. \tag{8.5}$$

Это по существу формула (8.3), но теперь яснее видно, что здесь все изменяется, а, кроме того, она напоминает, какие именно величины изменяются.

Существует еще один закон, который выполняется с хорошей точностью. Он гласит: изменение расстояния равно скорости, умноженной на интервал времени, за которое это изменение произошло, т. е. $\Delta s=v\Delta t$. Это правило строго справедливо только тогда, когда скорость не изменяется в течение интервала Δt, а это, вообще говоря, происходит, только когда Δt достаточно мало. В таких случаях обычно пишут $ds=v\,dt$, где под dt подразумевают интервал времени Δt при условии, что он сколь угодно мал. Если интервал Δt достаточно велик, то скорость за это время может измениться и выражение $\Delta s=v\Delta t$ будет уже приближенным. Однако если мы пишем dt, то при этом подразумевается, что интервал времени неограниченно мал и в этом смысле выражение $ds=v\,dt$ точное. В новых обозначениях выражение (8.5) имеет вид

$$v=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{ds}{dt}.$$

Величина ds/dt называется «производной s по t» (такое название напоминает о том, чтó изменяется), а сложный процесс нахождения производной называется, кроме того, дифференцированием. Если же ds и dt появляются отдельно, а не в виде отношения ds/dt, то они носят названия *дифференциалов*. Чтобы получше познакомить вас с новой терминологией, скажу еще, что в предыдущем параграфе мы нашли производную от функции $5t^2$, или просто производную от $5t^2$. Она оказалась равной $10t$. Когда вы больше привыкнете к новым словам, вам станет более понятна сама мысль. Для тренировки давайте найдем производную более сложной функции. Рассмотрим выражение $s=At^3+Bt+C$, которое может описывать движение точки. Буквы A, B, C, так же как и в обычном квадратном уравнении, обозначают постоянные числа. Нам нужно найти скорость движения, описываемого этой формулой в любой момент времени t. Рассмотрим для этого момент $t+\Delta t$, причем к s прибавится некоторая добавка Δs, и найдем, как выражается Δs через Δt. Поскольку

$$s+\Delta s = A(t+\Delta t)^3 + B(t+\Delta t) + C =$$
$$= At^3 + Bt + C + 3At^2\Delta t + B\Delta t + 3At(\Delta t)^2 + A(\Delta t)^3,$$

а

$$s = At^3 + Bt + C,$$

то

$$\Delta s = 3At^2\Delta t + B\Delta t + 3At(\Delta t)^2 + A(\Delta t)^3.$$

Но нам нужна не сама величина Δs, а отношение $\Delta s/\Delta t$. После деления на Δt получим выражение

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = 3At^2 + B + 3At(\Delta t) + A(\Delta t)^2,$$

которое после устремления Δt к нулю превратится в

$$\frac{ds}{dt} = 3At^2 + B.$$

В этом состоит процесс взятия производной, или дифференцирования функций. На самом деле он несколько легче, чем это кажется на первый взгляд. Заметьте, что если в разложениях, подобных предыдущим, встречаются члены, пропорциональные $(\Delta t)^2$ или $(\Delta t)^3$ или еще более высоким степеням, то их можно сразу вычеркнуть, поскольку они все равно обратятся в нуль, когда в конце мы будем Δt устремлять к нулю. После небольшой тренировки вы сразу будете видеть, что нужно оставлять, а что сразу отбрасывать. Существует много правил и формул для дифференцирования различных видов функций. Их можно либо запомнить, либо пользоваться специальными таблицами. Небольшой список таких правил приводится в табл. 8.3.

Таблица 8.3 • НЕКОТОРЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ

s, u, v, w — произвольные функции;
a, b, c, n — произвольные постоянные.

Функция	Производная
$s = t^n$	$\frac{ds}{dt} = nt^{n-1}$
$s = cu$	$\frac{ds}{dt} = c\frac{du}{dt}$
$s = u + v + w + \ldots$	$\frac{ds}{dt} = \frac{du}{dt} + \frac{dv}{dt} + \frac{dw}{dt} + \ldots$
$s = c$	$\frac{ds}{dt} = 0$
$s = u^a v^b w^c \ldots$	$\frac{ds}{dt} = s\left(\frac{a}{u}\frac{du}{dt} + \frac{b}{v}\frac{dv}{dt} + \frac{c}{w}\frac{dw}{dt} + \ldots\right)$

§ 4. *Расстояние как интеграл*

Обсудим теперь обратную проблему. Пусть вместо таблицы расстояний нам дана таблица скоростей в различные моменты времени, начиная с нуля. В табл. 8.4 представлена зависимость скорости падающего шара от времени. Аналогичную таблицу можно составить и для машины, если записывать показания спидометра через каждую минуту или полминуты. Но можно

Таблица 8.4 • СКОРОСТЬ ПАДАЮЩЕГО ШАРА

t, *сек*	v, *м/сек*
0	0
1	10
2	20
3	30
4	40

ли, зная скорость машины в любой момент времени, вычислить расстояние, которое ею было пройдено? Эта задача обратна той, которую мы только что рассмотрели. Как же решить ее, если скорость машины непостоянна, если она то ускоряется до 90 *км/час*, то замедляется, затем где-то останавливается у светофора и т.д.? Сделать это нетрудно. Нужно использовать ту же идею и выражать полное расстояние через бесконечно малые его части. Пусть в первую секунду скорость будет v_1, тогда по формуле $\Delta s = v_1 \Delta t$ можно вычислить расстояние, пройденное за эту секунду. В следующую секунду скорость будет несколько другой, хотя, может быть, и близкой к первоначальной, а расстояние, пройденное машиной за вторую секунду, будет равно новой скорости, умноженной на интервал времени (1 *сек*). Этот процесс можно продолжить дальше, до самого конца пути. В результате мы получим много маленьких отрезков, которые в сумме дадут весь путь. Таким образом, путь является суммой скоростей, умноженных на отдельные интервалы времени, или $s = \sum v \Delta t$, где греческая буква $\sum$ (сигма) означает суммирование. Точнее, это будет сумма скоростей в некоторые моменты времени, скажем t_i, умноженные на Δt:

$$s = \sum_i v(t_i)\,\Delta t, \tag{8.6}$$

причем каждый последующий момент t_{i+1} находится по правилу $t_{i+1} = t_i + \Delta t$. Но расстояние, полученное этим методом, не будет точным, поскольку скорость за время Δt все же изменяется. Выход из этого положения заключается в том, чтобы брать все меньшие и меньшие интервалы Δt, т. е. разбивать время движения на все большее число все меньших отрезков. В конце концов мы придем к следующему, теперь уже точному выражению для пройденного пути:

$$s = \lim_{\Delta t \to 0} \sum_i v(t_i)\,\Delta t. \tag{8.7}$$

Математики придумали для этого предела, как и для дифференциала, специальный символ. Значок Δ превращается в d, напоминая о том, что интервал времени сколь угодно мал, а знак суммирования превращается в $\int$ — искаженное большое S, первая буква латинского слова «Summa». Этот значок назван интегралом. Таким образом, мы пишем

$$s = \int v(t)\,dt, \tag{8.8}$$

где $v(t)$ — скорость в момент t. Сама же операция суммирования этих членов называется интегрированием. Она противоположна операции дифференцирования в том смысле, что производная этого интеграла равна $v(t)$, так что один оператор (d/dt) «уничтожает» другой $\left(\int\right)$. Это дает возможность получать формулы для интегралов путем обращения формул для дифференциалов: интеграл от функции, стоящей в правой колонке табл.8.3, будет равен функции, стоящей в левой колонке. Дифференцируя все виды функций, вы сами можете составить таблицу интегралов.

Любая функция, заданная в аналитическом виде, т. е. выражающаяся через комбинацию известных нам функций, дифференцируется очень просто — вся операция выполняется чисто алгебраически, и в результате мы всегда получаем какую-то известную функцию. Однако интеграл не от всякой функции можно записать в аналитическом виде. Разумеется, для каждого частного интеграла всегда сначала пытаются найти такую функцию, которая, будучи продифференцирована, давала бы функцию, стоящую после знака интеграла (она называется подынтегральной). Однако это не всегда удается сделать. В таких случаях интеграл вычисляют просто суммированием, т. е. вычисляют суммы типа (8.6) со все меньшими и меньшими интервалами, пока не получат результат с достаточной точностью.

§ 5. *Ускорение*

Следующий шаг на пути к уравнениям движения — это введение величины, которая связана с *изменением* скорости движения. Естественно спросить: а как изменяется скорость движения? В предыдущих главах мы рассматривали случай, когда действующая сила приводила к изменению скорости. Бывают легковые машины, которые набирают с места за 10 *сек* скорость

90 *км/час*. Зная это, мы можем определить, как изменяется скорость, но только в среднем. Займемся следующим более сложным вопросом: как узнать быстроту изменения скорости. Другими словами, на сколько метров в секунду изменяется скорость за 1 *сек*. Мы уже установили, что скорость падающего тела изменяется со временем по формуле $v=9{,}8\,t$ (см. табл. 8.4), а теперь хотим выяснить, насколько она изменяется за 1 *сек*. Эта величина называется ускорением.

Таким образом, ускорение определяется как быстрота изменения скорости. Всем сказанным ранее мы уже достаточно подготовлены к тому, чтобы сразу записать ускорение в виде производной от скорости, точно так же как скорость записывается в виде производной от расстояния. Если теперь продифференцировать формулу $v=9{,}8\,t$, то получим ускорение падающего тела

$$a=\frac{dv}{dt}=9{,}8. \tag{8.9}$$

(При дифференцировании этого выражения использовался результат, полученный нами раньше. Мы видели, что производная от Bt равна просто B (постоянной). Если же выбрать эту постоянную равной 9,8, то сразу находим, что производная от $9{,}8\,t$ равна 9,8.) Это означает, что скорость падающего тела постоянно возрастает на 9,8 *м/сек* за каждую секунду. Этот же результат можно получить и из табл. 8.4. Как видите, в случае падающего тела все получается довольно просто, но ускорение, вообще говоря, непостоянно. Оно получилось постоянным только потому, что постоянна сила, действующая на падающее тело, а по закону Ньютона ускорение должно быть пропорционально силе.

В качестве следующего примера найдем ускорение в той задаче, с которой мы уже имели дело при изучении скорости:

$$s=At^3+Bt+C.$$

Для скорости $v=ds/dt$ мы получили формулу

$$v=3At^2+B.$$

Так как ускорение — это производная скорости по времени, то для того, чтобы найти его значение, нужно продифференцировать эту формулу. Вспомним теперь одно из правил табл. 8.3, а именно что производная суммы равна сумме производных. Чтобы продифференцировать первый из этих членов, мы не будем проделывать всю длинную процедуру, которую делали раньше, а просто напомним, что такой квадратичный член встречался нам при дифференцировании функции $5t^2$, причем в результате коэффициент удваивался, а t^2 превращалось в t. Вы можете сами убедиться в том, что то же самое произойдет и сейчас. Таким образом, производная от $3At^2$ будет равна $6At$. Перейдем теперь к дифференцированию второго слагаемого. По одному из правил табл. 8.3 производная от постоянной будет нулем, следовательно, этот член не даст в ускорение никакого вклада. Окончательный результат: $a=dv/dt=6At$.

Выведем еще две полезные формулы, которые получаются интегрированием. Если тело из состояния покоя движется с постоянным ускорением g, то его скорость v в любой момент времени t будет равна

$$v=gt,$$

а расстояние, пройденное им к этому моменту времени,

$$s=\frac{1}{2}gt^2.$$

Заметим еще, что поскольку скорость — это ds/dt, а ускорение — производная скорости по времени, то можно написать

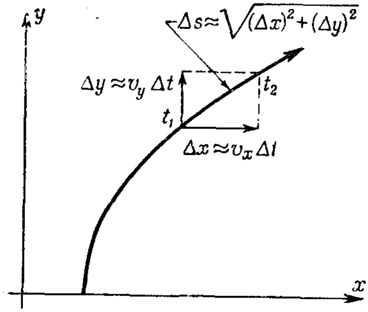
$$a=\frac{d}{dt}\left(\frac{ds}{dt}\right)=\frac{d^2s}{dt^2}. \qquad (8.10)$$

Так что теперь мы знаем, как записывается вторая производная.

Существует, конечно, и обратная связь между ускорением и расстоянием, которая просто следует из того, что $a=dv/dt$. Поскольку расстояние является интегралом от скорости, то оно может быть найдено двойным интегрированием ускорения.

Все предыдущее рассмотрение было посвящено движению в одном измерении, а теперь мы коротко остановимся на движении в пространстве трех измерений. Рассмотрим движение частицы P в трехмерном пространстве. Эта глава началась с обсуждения одномерного движения легковой машины, а именно с вопроса, на каком расстоянии от начала движения находится машина в различные моменты времени. Затем мы обсуждали связь между скоростью и изменением расстояния со временем и связь между ускорением и изменением скорости. Давайте в той же последовательности разберем движение в трех измерениях. Проще, однако, начать с более наглядного двумерного случая, а уж потом обобщить его на случай трех измерений. Нарисуем две пересекающиеся под прямым углом линии (оси координат) и будем задавать положение частицы в любой момент времени расстояниями от нее до каждой из осей. Таким образом, положение частицы задается двумя числами (координатами) x и y, каждое из которых является соответственно расстоянием до оси y и до оси x (фиг. 8.3). Теперь мы можем описать движение, составляя, например, таблицу, в которой эти две координаты заданы как функции времени. (Обобщение на трехмерный случай требует введения еще одной оси, перпендику-

Фиг. 8.3. Описание движения тела на плоскости и вычисление его скорости.



лярной двум первым, и измерения еще одной координаты z. Однако теперь расстояния берутся не до осей, а до координатных *плоскостей*.) Как определить скорость частицы? Для этого мы сначала найдем составляющие скорости по каждому направлению, или ее компоненты. Горизонтальная составляющая скорости, или x-компонента, будет равна производной по времени от координаты x, т. е.

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \tag{8.11}$$

а вертикальная составляющая, или y-компонента, равна

$$v_y = \frac{dy}{dt}. \tag{8.12}$$

В случае трех измерений необходимо еще добавить

$$v_z = \frac{dz}{dt}. \tag{8.13}$$

Как, зная компоненты скорости, определить полную скорость в направлении движения? Рассмотрим в двумерном случае два последовательных положения частицы, разделенных коротким интервалом времени $\Delta t = t_2 - t_1$ и расстоянием Δs. Из фиг. 8.3 видно, что

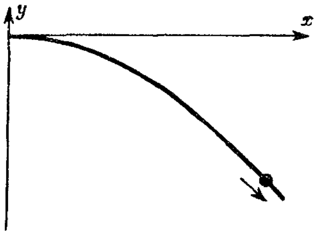
$$\Delta s \approx \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}. \tag{8.14}$$

(Значок $\approx$ соответствует выражению «приблизительно равно».) Средняя скорость в течение интервала Δt получается простым делением: $\Delta s/\Delta t$. Чтобы найти точную скорость в момент t, нужно, как это уже делалось в начале главы, устремить Δt к нулю. В результате оказывается, что

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}. \tag{8.15}$$

В трехмерном случае точно таким же способом можно получить

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}. \tag{8.16}$$



Фиг. 8.4. Парабола, которую описывает падающее тело, брошенное с горизонтальной начальной скоростью.

Ускорения мы определяем таким же образом, как и скорости: x-компонента ускорения a_x определяется как производная от x-компоненты скорости v_x (т. е. $a_x = d^2x/dt^2$ — вторая производная по времени) и т. д.

Давайте рассмотрим еще один интересный пример смешанного движения на плоскости. Пусть шарик движется в горизонтальном направлении с постоянной скоростью u и в то же время падает вертикально вниз с постоянным ускорением g. Что это за движение? Так как $v_x = dx/dt = u$ и, следовательно, скорость v_x постоянна, то

$$x = ut, \tag{8.17}$$

а поскольку ускорение движения вниз постоянно и равно $-g$, то координата y падающего шара дается формулой

$$y = -\frac{1}{2}gt^2. \tag{8.18}$$

Какую же кривую описывает наш шарик, т. е. какая связь между координатами x и y? Из уравнения (8.18), согласно (8.17), можно исключить время, поскольку $t = x/u$, после чего находим

$$y = -\frac{g}{2u^2}x^2. \tag{8.19}$$

Эту связь между координатами x и y можно рассматривать как уравнение траектории движения шарика. Если изобразить ее графически, то получим кривую, которая называется параболой (фиг. 8.4). Так что любое свободно падающее тело, будучи брошенным в некотором направлении, движется по параболе.

Глава 9

ДИНАМИЧЕСКИЕ ЗАКОНЫ НЬЮТОНА

§ 1. Импульс и сила

Открытие законов динамики или законов движения стало одним из наиболее драматических моментов в истории науки. До Ньютона движение различных тел, например планет, представлялось загадкой для ученых, но после открытия Ньютона все вдруг сразу стало понятно. Смогли быть вычислены даже очень слабые отклонения от законов Кеплера, обусловленные влиянием других планет. Движение маятника, колебания груза, подвешенного на пружине, и другие непонятные до того явления раскрыли свои загадки благодаря законам Ньютона. То же самое можно сказать и об этой главе. До нее вы не могли рассчитать, как движется грузик, прикрепленный к пружине, не говоря уже о том, чтобы определить влияние Юпитера и Сатурна на движение Урана. Но после этой главы вам будет доступно и то и другое!

Первый большой шаг в понимании движения был сделан Галилеем, когда он открыл свой *принцип инерции*: тело, предоставленное самому себе, если на него не действует никакая сила, сохраняет свое прямолинейное движение с постоянной скоростью, как двигалось до этого, или остается в покое, если оно до этого покоилось. Конечно, в природе такого не бывает. Попробуйте толкнуть кубик, стоящий на столе. Он остановится. Причина в том, что кубик *трется* о стол, он *не* предоставлен самому себе. Нужно иметь очень богатое воображение, чтобы увидеть за этим принцип инерции.

Естественно нужно еще разрешить следующий вопрос: а как *изменяется* скорость тела, если на него что-то *действует*? Ответ был дан Ньютоном. Он сформулировал три закона. *Первый* закон представляет собой просто повторение принципа инерции Галилея. *Второй* закон говорит о том, как изменяется скорость тела, когда оно испытывает различные влияния, т. е. когда на него действуют *силы*. *Третий* закон в каком-то смысле описывает силы, но о нем мы поговорим несколько позже. Здесь будет идти речь о Втором законе, согласно которому под действием силы движение тел изменяется следующим образом: *скорость изменения со временем некой величины, называемой количеством движения*, или *импульсом*, *пропорциональна силе*. Позднее мы запишем короткую математическую формулировку этого закона, а сейчас давайте разберемся в его содержании.

Импульс и *скорость* — вещи разные. В физике употребляется много слов, и каждое из них в отличие от обычного разговорного языка имеет точный смысл. Примером может служить слово «импульс», и мы должны определить его точно. Толкните слегка рукой какой-нибудь легкий предмет — он тотчас начнет двигаться. Если с такой же силой толкнуть гораздо более тяжелый предмет, то он будет двигаться значительно медленней. В сущности нужно говорить не о «легком» или «тяжелом» предмете, а о *менее массивном* или *более массивном*, так как между *весом* и *инерцией* предмета есть разница, которую нужно понимать. (Сколько весит тело — это одно, а насколько трудно разогнать его — совсем другое.) Однако на поверхности Земли вес и инерция *пропорциональны* друг другу и зачастую рассматриваются как численно равные. Это часто приводит к непониманию разницы между ними. На Марсе, например, вес предметов будет отличаться от веса на Земле, но инертность останется той же самой, т. е. потребуется то же количество силы, чтобы преодолеть инерцию тела.

Количественной мерой инертности является *масса*. Ее можно измерять так: просто привязать предмет на веревочке, крутить его с определенной скоростью и измерять ту силу, которая необходима, чтобы удержать его. Этим способом можно измерять массу любых предметов. *Импульс* — это просто произведение *массы* тела на его *скорость*. Теперь можно записать Второй закон Ньютона в математической форме:

$$\mathbf{F} = \frac{d}{dt}(m\mathbf{v}). \qquad (9.1)$$

Давайте разберем подробнее некоторые его стороны. При написании закона, подобного этому, обычно используется много интуитивных идей; что-то подразумевается, что-то предполагается и комбинируется в приближенный «закон». Но после этого необходимо снова вернуться назад и подробно изучить, что означает каждый член. Если же пытаться сделать это с самого начала, то можно безнадежно запутаться. Так что мы считаем некоторые положения само собой разумеющимися и не требующими никакого доказательства. Во-первых, мы считаем, что массы тел *постоянны*. Это, вообще говоря, неправильно, но мы начнем с ньютоновского приближения, когда масса считается постоянной и не изменяющейся с течением времени. Во-вторых, если сложить вместе два предмета, то масса образовавшегося тела равна *сумме* их масс. Это положение неявно предполагалось Ньютоном, когда он писал свои уравнения, в противном случае они были бы бессмысленны. Пусть, например, масса изменяется обратно пропорционально скорости, но тогда импульс *никогда бы не изменялся* и закон потерял бы всякое содержание, за исключением только того, что вы знаете, как изменяется масса со скоростью. Так что сначала мы считаем *массу неизменной*.

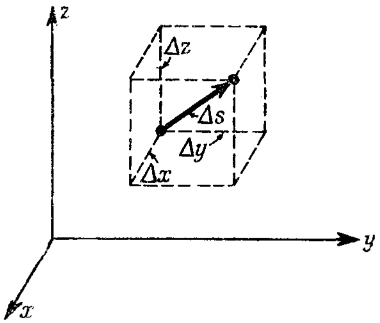
Несколько слов о силе. В качестве первого грубого приближения мы рассматривали силу как некий толчок или тягу, которая может быть произведена с помощью наших мышц, но теперь, пользуясь уравнением движения, мы можем определить ее более точно. Очень важно помнить, что закон Ньютона включает не только изменение *величины* импульса, но и изменение его *направления*. Итак, если масса постоянна, то уравнение (9.1) можно записать в виде

$$\mathbf{F} = m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = m\mathbf{a}, \tag{9.2}$$

где $\mathbf{a}$ — ускорение, т. е. «скорость изменения скорости». Второй закон Ньютона означает не только то, что изменения, вызванные данной силой, обратно пропорциональны массе, но и то, что *направление* изменения скорости совпадает с *направлением* действия силы. Важно понимать, что термин «ускорение» имеет в физике более широкий смысл, чем в обычной разговорной речи. Он означает не только увеличение скорости, но и замедление (в этом случае мы говорим, что ускорение отрицательно), и перемену направления движения. В гл. 7 мы уже познакомились с ускорением, направленным под прямым углом к скорости, и мы видели, что предмет, движущийся по окружности радиусом R со скоростью v, за малый интервал времени t уклоняется от своего прямого пути на расстояние $^1/_2\ (v^2/R)t^2$. Так что в этом случае ускорение направлено под прямым углом к направлению движения и равно

$$a = \frac{v^2}{R}. \tag{9.3}$$

Таким образом, сила, действующая под прямым углом к скорости, вызывает искривление пути, причем радиус кривизны можно найти, деля силу на массу тела (при этом мы получаем ускорение) и используя затем формулу (9.3).



Фиг. 9.1. Малое перемещение тела.

Термин «скорость» тоже имеет в физике более широкий смысл, чем в обыденной жизни. Это не просто некоторое количество метров в секунду, т. е. абсолютная величина скорости, но и *направление* перемещения в каждый момент времени. Математически мы можем описать и величину, и направление скорости, если будем задавать изменение координат тела с течением времени. Пусть, например, в некоторый момент тело движется так, как это показано на фиг. 9.1. Тогда за малый промежуток времени Δt оно пройдет некоторое расстояние Δx в направлении оси x, Δy в направлении оси y и Δz в направлении оси z. Результатом же этих изменений координат будет перемещение Δs вдоль диагонали параллелепипеда со сторонами Δx, Δy, Δz, которые следующим образом связаны с составляющими скорости и интервалом:

$$\Delta x = v_x \Delta t, \quad \Delta y = v_y \Delta t, \quad \Delta z = v_z \Delta t. \tag{9.4}$$

§ 2. Компоненты скорости, ускорения и силы

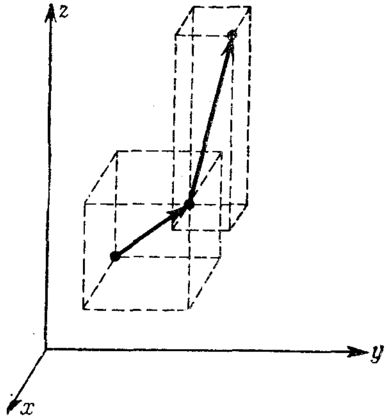
В уравнении (9.4) мы *разложили скорость на составляющие* (или *компоненты*), которые говорят нам, насколько быстро продвигается тело в направлениях x, y и z. Скорость будет полностью определена как в отношении ее направления, так и абсолютной величины, если задать числовые значения трех ее компонент:

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt}, \quad v_z = \frac{dz}{dt}. \tag{9.5}$$

При этом абсолютная величина равна

$$\frac{ds}{dt} = |v| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}. \tag{9.6}$$

Теперь пусть под действием силы меняется не только величина, но и направление скорости (фиг. 9.2). Хотя это довольно сложный случай, но с помощью подсчета изменения компонент его рассмотрение сильно упрощается. Изменение x-компоненты



Фиг. 9.2. Скорость изменяется как по величине, так и по направлению.

скорости за интервал Δt будет $\Delta v_x = a_x \Delta t$, где a_x то, что называется x-компонентой ускорения. Совершенно аналогично $\Delta v_x = a_y \Delta t$ и $\Delta v_z = a_t \Delta t$. В такой формулировке Второй закон Ньютона фактически превращается в три закона. Действительно, мы говорим, что сила имеет то же направление, что и ускорение, так что каждая из составляющих силы в направлениях x, y и z равна массе, умноженной на изменение соответствующей компоненты скорости:

$$F_x = m\left(\frac{dv_x}{dt}\right) = m\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right) = ma_x,$$

$$F_y = m\left(\frac{dv_y}{dt}\right) = m\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right) = ma_y, \qquad (9.7)$$

$$F_z = m\left(\frac{dv_z}{dt}\right) = m\left(\frac{d^2z}{dt^2}\right) = ma_z.$$

Подобно скорости и ускорению, сила тоже может быть разложена на компоненты, причем каждая из них является проекцией отрезка прямой, численно равного абсолютной величине силы и указывающего направление ее действия, на оси x, y и z:

$$F_x = F\cos(\widehat{xF}),$$

$$F_y = F\cos(\widehat{yF}), \qquad (9.8)$$

$$F_z = F\cos(\widehat{zF}),$$

где F — абсолютная величина силы, а $(\widehat{xF})$, $(\widehat{yF})$ и $(\widehat{zF})$— углы между направлением силы и осями x, y и z соответственно.

Уравнения (9.7) представляют собой полную форму Второго закона Ньютона. Зная силы, действующие на тело, и разлагая их на компоненты, можно с помощью этих уравнений найти движение тела. Давайте рассмотрим простой пример. Пусть в направлениях x и y не действуют никакие силы, а есть сила только в направлении z (скажем, вертикально). Тогда, согласно уравнению (9.7), изменяется только одна вертикальная составляющая скорости; что же касается горизонтальных, то они будут оставаться неизменными. Пример такого движения уже рассматривался в гл. 7 (см. фиг. 7.3). Таким образом, горизонтальное движение падающего тела остается неизменным, тогда как в вертикальном направлении оно движется так, как будто никакого горизонтального движения вообще нет. Другими словами, если компоненты *сил* не связаны друг с другом, то и движения в направлениях осей x, y и z будут независимы.

§ 3. *Что такое сила?*

Чтобы пользоваться законами Ньютона, мы должны иметь какую-то формулу для сил; ведь эти законы говорят нам: *подумайте о силах.* Если тело ускоряется, стало быть, на него что-то действует. А как найти это «что-то»? Нашей программой на будущее должно быть *отыскание законов для сил.* Некоторые из таких законов были найдены самим Ньютоном. Например, формула для силы тяготения. Часть сведений о силах другого рода содержится в Третьем законе, который утверждает равенство сил действия и противодействия, но об этом более подробно пойдет речь в следующей главе.

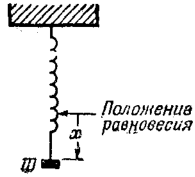
Продолжим наш предыдущий пример. Что за силы действуют на тело вблизи поверхности Земли? Это — сила тяжести, направленная вертикально вниз, пропорциональная массе тела и для высот, много меньших, чем радиус Земли R, почти не зависящая от высоты; она равна $F=GmM/R^2=mg$, где $g=GM/R^2$ — так называемое *ускорение силы тяжести.* В горизонтальном направлении тело по-прежнему будет двигаться с постоянной скоростью, однако движение в вертикальном направлении более интересно. По Второму закону Ньютона

$$mg=m\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right). \tag{9.9}$$

После сокращения массы m получаем, что ускорение в направлении x постоянно и равно g. Это хорошо известное движение свободно падающего тела, которое описывается уравнениями

$$\begin{aligned} v_x&=v_0+gt,\\ x&=x_0+v_0t+\frac{1}{2}gt^2. \end{aligned} \tag{9.10}$$

Рассмотрим другой пример. Представим, что мы смогли создать устройство (фиг. 9.3), в котором сила прямо пропорциональна отклонению от положения равновесия и направлена противоположно ему,— это пружина с грузиком. Действительно, поскольку сила тяжести компенсируется начальным



Фиг. 9.3. Грузик на пружинке.

натяжением пружины, то имеет смысл говорить только об *избыточной* силе. Если потянуть грузик вниз, то пружина растянется и потянет его вверх, если же толкать грузик вверх, то пружина сожмется и будет толкать его вниз. При этом все устроено таким образом, что чем больше сила и чем сильнее мы оттягиваем грузик вниз, тем больше растягивается пружина и тем сильнее она тянет его вверх, и наоборот. Наблюдая за работой этого устройства, мы видим довольно интересное движение: вверх — вниз, вверх — вниз... Возникает вопрос, могут ли уравнения Ньютона правильно описать его? Если применить закон Ньютона (9.7) для такого периодического осциллятора, то получим следующее уравнение:

$$-kx = m\left(\frac{dv_x}{dt}\right), \tag{9.11}$$

т. е. здесь мы встречаемся с таким положением, когда x-компонента скорости изменяется с быстротой, пропорциональной x. Нет смысла сейчас вводить многочисленные константы; в целях простоты предположим, что либо изменился масштаб времени, либо что-то произошло с другими единицами измерения, словом, они выбраны так, что k/m равно единице. Итак, будем пытаться решать уравнение

$$\frac{dv_x}{dt} = -x. \tag{9.12}$$

Чтобы пойти дальше, нужно сначала разобраться в том, что такое v_x; то, что это быстрота изменения положения, нам, разумеется, уже известно.

§ 4. *Смысл динамических уравнений*

Попытаемся теперь понять, что же означает уравнение (9.12). Пусть в данный момент времени t тело находится в точке x и движется со скоростью v_x. Каково будет его положение и скорость спустя небольшой промежуток времени, т. е. в момент $t + \varepsilon$? Если мы сможем ответить на этот вопрос, то проблема решена, так как, исходя из начальных условий, т. е. положения и скорости в некоторый начальный момент времени, можно сказать, как они изменяются в первый момент, а зная положение и скорость в первый момент, можно найти их и в следующий и т. д. Таким образом, шаг за шагом выстраивается вся картина движения. Для большей определенности предположим, что в момент $t=0$ положение грузика $x=1$, а его скорость $v_x=0$. Почему вообще движется грузик? Да потому, что на него в любом положении, за исключением положения равновесия $x=0$, действует *сила*. Если $x>0$, то эта сила направлена вверх. Следовательно, скорость, которая вначале была нулем, благодаря уравнениям движения начинает изменяться. Но как только скорость начинает возрастать, грузик приходит в движение. Для любого момента времени t при очень малом ε можно с достаточно хорошей точностью найти положение в момент $t+\varepsilon$ через скорость и положение в момент t:

$$x(t+\varepsilon)=x(t)+\varepsilon v_x(t). \tag{9.13}$$

Конечно, это выражение тем точнее, чем меньше ε, но оно может быть достаточно точным, даже когда интервал ε не исчезающе мал. Что теперь можно сказать о скорости? Чтобы определить скорость в момент $t+\varepsilon$, очевидно, нужно знать, как она изменяется со временем, т. е. нужно знать *ускорение*. А как узнать его? Вот здесь-то нам на помощь приходят уравнения динамики. Именно они позволяют определить, чему равно ускорение. В нашей задаче уравнение динамики говорит, что ускорение равно $-x$. Поэтому

$$v_x(t+\varepsilon)=v_x(t)+\varepsilon a_x(t), \tag{9.14}$$

$$=v_x(t)-\varepsilon x(t). \tag{9.15}$$

Уравнение (9.14) еще кинематическое; оно просто говорит о том, что из-за наличия ускорения скорость изменяется. Однако уравнение (9.15) уже *динамическое*, потому что оно связывает ускорение с силой. Оно говорит, что в данной частной задаче для данного момента времени ускорение можно заменить на $-x(t)$. Следовательно, если в какой-то момент времени нам известны положение x и скорость v_x, то мы знаем и ускорение, которое дает возможность найти скорость в следующий момент, а скорость в свою очередь определяет новое положение и т. д. Вот каким образом действует весь этот динамический механизм! Действующая сила немного изменяет скорость, а скорость приводит к небольшому изменению положения.

§ 5. Численное решение уравнений

Давайте теперь действительно решим нашу задачу. Допустим, что мы взяли $\varepsilon=0{,}100$ *сек*. (Если после того, как мы проделаем все вычисления, окажется, что этот интервал не достаточно мал, то необходимо повторить все сначала с меньшим интервалом времени, например 0,010 *сек.*) Чему будет равно x (0,1), если в начальный момент времени $x(0) = 1$? Оно равно старому положению $x(0)$ плюс скорость в начальный момент (которая равна нулю), умноженная на 0,10 *сек*. Таким образом, x (0,1) равно 1,00, ибо грузик еще не начал двигаться. Но новая скорость в момент 0,10 *сек* будет равна старой скорости $v(0) = 0$ плюс ε, умноженное на ускорение. А само ускорение равно $-x(0) = -1{,}00$. Так что

$$v(0,1) = 0{,}00 + 0{,}10 \cdot 1{,}00 = -0{,}10.$$

В момент 0,20 *сек*

$$x(0{,}2) = x(0{,}1) + \varepsilon v(0{,}1) = 1{,}00 - 0{,}10 \cdot 0{,}10 = 0{,}99$$

и

$$v(0{,}2) = v(0{,}1) + \varepsilon a(0{,}1) = -0{,}10 - 0{,}10 \cdot 1{,}00 = -0{,}20.$$

Продолжая эту процедуру еще и еще, можно найти положение и скорость в любой момент времени, а это как раз то, что нам нужно. Однако практически мы используем нехитрый прием, который позволит увеличить точность вычислений. Если бы мы продолжали начатые нами расчеты, то они оказались бы довольно грубыми, поскольку интервал $\varepsilon = 0{,}10$ *сек* довольно большой. Пришлось бы уменьшить его, скажем, до 0,01 *сек*. Но тогда, чтобы проследить движение за какой-то разумный отрезок времени, потребовалось бы сделать множество шагов. Мы же организуем процесс таким образом, что сможем увеличить точность, используя тот же интервал $\varepsilon = 0{,}10$ *сек*. Этого можно достичь, несколько изменив метод расчета.

Заметьте, что новое положение тела равно старому плюс интервал времени ε, умноженный на скорость. Но что это за скорость? *В какой момент*? В начале интервала одна скорость, а в конце она совсем другая. Прием состоит в том, чтобы брать скорость в *середине интервала*. Если известна скорость в настоящий момент и известно, что она меняется, как же можно надеяться получить удовлетворительный результат, считая, что тело все время движется с той же скоростью, что и в настоящий момент? Более разумно использовать какую-то среднюю скорость между началом и концом интервала. Те же рассуждения применимы к изменению самой скорости: для подсчета ее изменений нужно использовать ускорение в средней точке между двумя моментами времени, в которых необходимо найти скорость. Таким образом, реально мы будем пользоваться следующими уравнениями: положение в конце интервала равно положению в начале плюс интервал ε, умноженный на скорость в *середине интервала*. Эта скорость в свою очередь равна скорости в середине предыдущего интервала (т. е. на отрезок ε меньше) плюс ускорение в начале интервала, умноженное на ε.

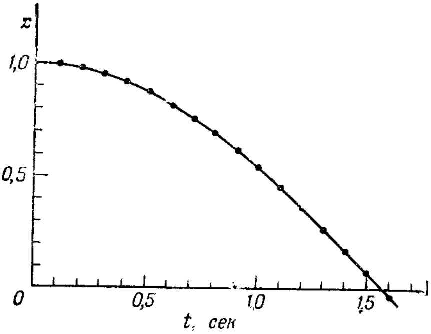
Таким образом, мы будем пользоваться уравнениями

$$
\begin{aligned}
x(t+\varepsilon) &= x(t)+\varepsilon v\left(t+\frac{\varepsilon}{2}\right),\\
v\left(t+\frac{\varepsilon}{2}\right) &= v\left(t-\frac{\varepsilon}{2}\right)+\varepsilon a(t), \quad a(t)=-x(t).
\end{aligned}
\tag{9.16}
$$

Остается еще один небольшой вопрос: что такое $v(\varepsilon/2)$? Вначале у нас было $v(0)$, а не $v(-\varepsilon/2)$. Но теперь, чтобы начать наши вычисления, необходимо использовать дополнительное уравнение $v(\varepsilon/2) = v(0) + (\varepsilon/2)\,a(0)$.

Таблица 9.1 • РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ $(dv_x/dt) = -x$
Интервал $\varepsilon = 0{,}10$ *сек*

t	x	v_x	a_x
0,0	1,000	0,000	—1,000
		—0,050	
0,1	0,995		—0,995
		—0,150	
0,2	0,980		—0,980
		—0,248	
0,3	0,955		—0,955
		—0,343	
0,4	0,921		—0,921
		—0,435	
0,5	0,877		—0,877
		—0,523	
0,6	0,825		—0,825
		—0,605	
0,7	0,764		—0,764
		—0,682	
0,8	0,696		—0,696
		—0,751	
0,9	0,621		—0,621
		—0,814	
1,0	0,540		—0,540
		—0,868	
1,1	0,453		—0,453
		—0,913	
1,2	0,362		—0,362
		—0,949	
1,3	0,267		—0,267
		—0,976	
1,4	0,169		—0,169
		—0,993	
1,5	0,070		—0,070
		—1,000	
1,6	—0,030		+0,030

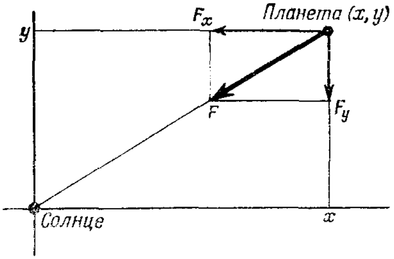


Фиг. 9.4. График движения грузика на пружинке.

Ну, а теперь все готово для расчетов. Для удобства можно их выполнить в виде таблицы, в столбцах которой стоят время, положение, скорость и ускорение, причем скорость пишется в промежутках между строками (табл. 9.1). Такая таблица есть, конечно, просто удобный способ записи результатов, полученных из уравнений (9.16), и фактически полностью заменяет их. Мы просто заполняем одно за другим свободные места в ней и получаем очень интересную картину движения: сначала грузик находится в покое, затем понемногу приобретает отрицательную скорость (вверх), а это приводит к уменьшению его расстояния от точки равновесия. При этом хотя ускорение и становится меньше, оно все еще «подгоняет» скорость. Однако по мере приближения к положению равновесия ($x = 0$) ускорение становится все меньше и меньше, скорость нарастает все медленней и медленней, но все же еще нарастает вплоть до точки $x = 0$, которая достигается примерно через 1,5 *сек*. Скажем по секрету, что произойдет дальше. Грузик, конечно, не остановится в точке $x = 0$, а пойдет дальше, но теперь все пойдет наоборот: его положение x станет отрицательным, а ускорение — положительным. Скорость начнет уменьшаться. Интересно сравнить полученные нами числа с функцией $\cos t$. Результат этого сравнения представлен на фиг. 9.4. Оказывается, что в пределах точности наших расчетов (три знака после запятой) совпадение полное! Позднее вы узнаете, что функция $\cos t$ — точное решение нашего уравнения, так что у вас теперь есть наглядное представление о мощи численного анализа: столь простой расчет дает столь точный результат.

§ 6. *Движение планет*

Приведенный анализ очень подходит к движению осциллирующей пружинки с грузиком, но можно ли таким же путем вычислять движение планеты вокруг Солнца? Давайте посмотрим, можно ли при некоторых приближениях получить эллиптическую орбиту. Предположим, что Солнце бесконечно



Фиг. 9.5. Сила притяжения, действующая на планету.

тяжелое в том смысле, что его движение не будет приниматься в расчет.

Допустим, что в известной точке планета начала свое движение и имеет определенную скорость. Она движется вокруг Солнца по какой-то кривой, и мы попытаемся определить с помощью уравнений движения Ньютона и его же закона всемирного тяготения, что это за кривая. Как это сделать? В некоторый момент времени планета находится в каком-то определенном месте, на расстоянии r от Солнца; в этом случае известно, что на нее действует сила, направленная по прямой к Солнцу, которая, согласно закону тяготения, равна определенной постоянной, умноженной на произведение масс планеты и Солнца и деленной на квадрат расстояния между ними. Чтобы рассуждать дальше, нужно выяснить, какое ускорение вызывает эта сила.

Однако в отличие от предыдущей задачи нам потребуются теперь *компоненты* ускорения в двух направлениях, которые мы назовем x и y. Положение планеты в данный момент будет определяться координатами x и y, поскольку третья координата z всегда равна нулю.

Действительно, координатная плоскость xy выбрана нами таким образом, что z-компоненты как силы, так и начальной скорости равны нулю, а поэтому нет никаких причин, которые бы заставили планету выйти из этой плоскости. Сила при этом будет направлена по линии, соединяющей планету с Солнцем, как это показано на фиг. 9.5.

Из этого рисунка видно, что горизонтальная компонента силы так относится к полной ее величине, как координата x относится к расстоянию r. Это сразу следует из подобия треугольников. Кроме того, если x положительна, то F_x отрицательна, и наоборот.

Таким образом, $F_x/|F| = -x/r$, или $F_x = -|F|x/r = -GM\,mx/r^3$ и соответственно $F_y = -GMmy/r^3$. Теперь можно воспользоваться динамическими законами (9.7) и написать, что x- или y-компонента ускорения, умноженная на массу планеты, равна соответственно x- или y-компоненте силы:

$$m\left(\frac{dv_x}{dt}\right)=-\frac{GMmx}{r^3},$$

$$m\left(\frac{dv_y}{dt}\right)=-\frac{GMmy}{r^3}, \qquad (9.17)$$

$$r=\sqrt{x^2+y^2}.$$

Это именно та система уравнений, которую мы должны решить. Для того чтобы упростить вычисления, предположим, что либо единицы измерения времени или массы выбраны соответствующим образом, либо нам просто повезло, словом, получилось так, что $GM\equiv 1$. Для нашего случая предположим, что в начальный момент $t=0$ планета находилась в точке с координатами $x=0{,}500$ и $y=0{,}000$, а скорость ее в этот момент направлена параллельно оси y и равна 1,6300. Как же в этом случае делаются расчеты? Снова составляется таблица со столбцами для времени t, координаты x, x-компонент скорости v_x и ускорения a_x. Затем идут отделенные чертой три колонки: для координаты y, y-компонент скорости и ускорения. Однако, для того чтобы подсчитать ускорения, мы должны воспользоваться уравнением (9.17), согласно которому его компоненты равны $-x/r^3$ и $-y/r^3$, а $r=\sqrt{x^2+y^2}$. Так что, получив x и y, мы должны где-то в сторонке провести небольшие вычисления — извлечь квадратный корень из суммы квадратов и получить расстояние. Удобно также отдельно вычислить и $1/r^3$.

После этого все готово, чтобы определить компоненты ускорения. Всю эту работу можно сильно облегчить, если пользоваться таблицами квадратов, кубов и обратных величин. На нашу долю останется тогда только умножение x на $1/r^3$, которое легко выполняется на логарифмической линейке.

Перейдем к дальнейшему. Возьмем интервал времени $\varepsilon=0{,}100$. В начальный момент $t=0$

$$x(0)=0{,}500, \qquad y(0)=0{,}000,$$

$$v_x(0)=0{,}000, \qquad v_y(0)=+1{,}630.$$

Отсюда находим

$$r(0)=0{,}500, \qquad \frac{1}{r^3}=8{,}000,$$

$$a_x=-4{,}000, \qquad a_y=0{,}000.$$

После этого можно вычислять компоненты $v_x(0{,}05)$ и $v_y(0{,}05)$:

$$v_x(0{,}05)=0{,}000-4{,}000\cdot 0{,}050=-0{,}200,$$

$$v_y(0{,}05)=1{,}630+0{,}000\cdot 0{,}100=1{,}630.$$

Таблица 9.2 • **ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПУТИ ПЛАНЕТЫ ВОКРУГ СОЛНЦА**

Решение системы уравнений: $\frac{dv_x}{dt}=-\frac{x}{r^3}$, $\frac{dv_y}{dt}=-\frac{y}{r^3}$, $r=\sqrt{x^2+y^2}$. Интервал $\varepsilon=0,100$

При $t=0$, $v_y=1,63$, $v_x=0$, $x=0,5$, $y=0$

t	x	v_x	a_x	y	v_y	a_y	r	$1/r^3$
0,0	0,500		—4,00	0,000		0,00	0,500	8,000
		—0,200			1,630			
0,1	0,480		—3,68	0,163		—1,25	0,507	7,675
		—0,568			1,505			
0,2	0,423		—2,91	0,313		—2,15	0,526	6,873
		—0,859			1,290			
0,3	0,337	5	—1,96	0,442		—2,57	0,556	5,824
		— 1,05			1,033			
0,4	0,232		—1,11	0,545		—2,62	0,592	4,81
		—1,166			0,771			
0,5	0,115		—0,453	0,622		—2,45	0,633	3,942
		—1,211			0,526			
0,6	—0,006		+0,020	0,675		—2,20	0,675	3,252
		—1,209			0,306			
0,7	—0,127		+0,344	0,706		—1,91	0,717	2,712
		—1,175			0,115			
0,8	—0,245		+0,562	0,718		—1,64	0,758	2,296
		—1,119			—0,049			
0,9	—0,357		+0,705	0,713		—1,41	0,797	1,975
		—1,048			—0,190			
1,0	—0,462		+0,796	0,694		—1,20	0,834	1,723
		—0,968			—0,310			

1,1	**—0,559**		**+0,858**	0,663		—1,02	0,867	1,535
		—0,882			—0,412			
1,2	—0,647		+0,90	0,622		—0,86	0,897	1,385
		—0,792			—0,499			
1,3	—0,726		+0,92	0,572		—0,72	0,924	1,267
		—0,700			—0,570			
1,4	—0,796		+0,93	0,515		—0,60	0,948	1,173
		—0,607			—0,630			
1,5	—0,857		+0,94	0,452		—0,50	0,969	1,099
		—0,513			—0,680			
1,6	—0,908		+0,95	0,384		—0,40	0,986	1,043
		—0,418			—0,720			
1,7	—0,950		+0,95	0,312		—0,31	1,000	1,000
		—0,323			—0,751			
1,8	—0,982		+0,95	0,237		—0,23	1,010	0,970
		—0,228			—0,773			
1,9	—1,005		+0,95	0,160		—0,15	1,018	0,948
		—0,113			—0,778			
2,0	—1,018		+0,96	0,081		—0,08	1,021	0,939
		—0,037			—0,796			
2,1	—1,022		+0,95	0,001		0,00	1,022	0,936
		+0,058			—0,796			
2,2	—1,016		+0,96	−0,079		+0,07	1,019	0,945
					—0,789			
2,3								

Ось x **пересекается в момент 2,101 *сек*, период обращения равен 4,20 *сек*. В момент 2,086 *сек* компонента скорости** $v_x=0$.

Орбита пересекается с осью x при $x=1{,}022$, длина главной полуоси равна $\frac{1{,}022+0{,}500}{2}=0{,}761$, $v_y=0{,}796$

Предсказываемое время **полуоборота** равно $\pi(0{,}761)^{3/2}=\pi(0{,}663)=2{,}082$

А теперь начнем наш основной расчет:

$$x(0{,}1) = 0{,}500 - 0{,}200 \cdot 0{,}1 = 0{,}480,$$
$$y(0{,}1) = 0{,}00 \ \ + 1{,}63 \ \ \cdot 0{,}1 = 0{,}163,$$
$$r = \sqrt{(0{,}480)^2 + (0{,}163)^2} = 0{,}507,$$
$$\frac{1}{r^3} = 7{,}67,$$
$$a_x(0{,}1) \ = 0{,}480 \cdot 7{,}67 \qquad\qquad = -3{,}68,$$
$$a_y(0{,}1) \ = -0{,}163 \cdot 7{,}70 \qquad\qquad = -1{,}256,$$
$$v_x(0{,}15) = -0{,}200 - 3{,}68 \cdot 0{,}1 = -0{,}568,$$
$$v_y(0{,}15) = 1{,}630 - 1{,}26 \cdot 0{,}1 \qquad = 1{,}505,$$
$$x(0{,}2) \ \ = 0{,}480 - 0{,}568 \cdot 0{,}1 \ = 0{,}423,$$
$$y(0{,}2) \ \ = 0{,}163 + 1{,}50 \cdot 0{,}1 \qquad = 0{,}313$$

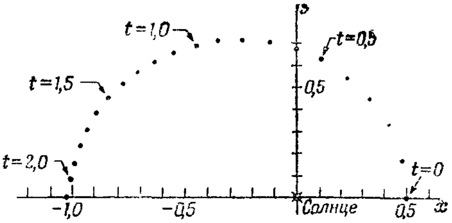
и т. д.

В результате мы получим числа, приведенные в табл. 9.2, где приблизительно за 20 шагов прослежена половина пути нашей планеты вокруг Солнца. На фиг. 9.6 отложены координаты планеты x и y, приведенные в табл. 9.2. Точки представляют собой последовательные положения планеты через каждую десятую долю выбранной нами единицы времени. Видно, что сначала она двигалась быстро, а затем — все медленней и медленней. Видна также и форма кривой движения планеты. Итак, вы теперь знаете, как *реально* можно вычислять движение планет!

Давайте посмотрим теперь, как вычислить движение Нептуна, Юпитера, Урана и остальных планет. Можно ли сделать подробные расчеты со множеством планет, учитывая к тому же и движение Солнца? Разумеется, можно. Найдем сначала силу, действующую на каждую данную планету, например на ту, которую мы обозначим номером i и координаты которой x_i, y_i и z_i ($i = 1$ может означать Солнце, $i = 2$ — Меркурий, $i = 3$ — Венеру и т. д.). Наша задача — найти координаты всех планет. По закону тяготения x-компонента силы, действующая на i-ю планету со стороны планеты номер j с координатами x_j, y_j, z_j, будет равна $-Gm_im_j(x_i - x_j)/r_{jj}^3$. Если же учесть силы со стороны всех планет, то получим следующую систему уравнений:

$$m_i\left(\frac{dv_{ix}}{dt}\right) = \sum_{j=1}^{N}\left[-\frac{Gm_im_j(x_i - x_j)}{r_{ij}^3}\right],$$
$$m_i\left(\frac{dv_{iy}}{dt}\right) = \sum_{j=1}^{N}\left[-\frac{Gm_im_j(y_i - y_j)}{r_{ij}^2}\right], \qquad (9.18)$$
$$m_i\left(\frac{dv_{iz}}{dt}\right) = \sum_{j=1}^{N}\left[-\frac{Gm_im_j(z_i - z_j)}{r_{ij}^2}\right],$$

Фиг. 9.6. График движения планеты вокруг Солнца.



где r_{ij} — расстояние между i-й и j-й планетами:

$$r_{ij}=\sqrt{(x_i-x_j)^2+(y_i-y_j)^2+(z_i-z_j)^2}, \qquad (9.19)$$

а $\sum$ означает суммирование по всем остальным планетам, т. е. по всем значениям j, за исключением, конечно, $j=i$. Таким образом, чтобы решить это уравнение, нужно лишь значительно увеличить количество столбцов в нашей таблице. Для движения Юпитера понадобится девять столбцов, для Сатурна — тоже девять и т. д. Если нам заданы все начальные положения и скорости, то из уравнения (9.18) можно подсчитать все ускорения, вычислив, конечно, предварительно по формуле (9.19) все расстояния r_{ij}. А сколько же времени потребуется на все эти вычисления? Если вы будете делать их сами дома, то очень много! Однако сейчас уже имеются машины, неимоверно быстро выполняющие все арифметические расчеты. Сложение, например, такая машина выполняет за 1 *мксек*, т. е. за одну миллионную долю секунды, а умножение — за 10 *мксек*. Так что если один цикл расчетов состоит из 30 операций умножения, то это займет всего лишь 300 *мксек*, или за 1 *сек* можно сделать 3000 циклов. Если мы хотим считать с точностью до одной миллиардной, то для того, чтобы покрыть все время обращения планеты вокруг Солнца, требуется $4\cdot 10^5$ циклов. (Оказывается, что ошибка в расчетах приблизительно пропорциональна квадрату ε. Если брать интервал в тысячу раз меньший, то ошибка уменьшится в миллион раз. Так что для обеспечения нашей точности нужно взять интервал в 10 000 раз меньше.) На машине это займет 130 *сек*, или около 2 *мин*. Всего лишь 2 *мин*, для того чтобы «прогнать» Юпитер вокруг Солнца и при этом еще с точностью до одной миллиардной учесть все возмущения от других планет!

Итак, в начале этой главы для вас были загадкой движения грузика на пружинке, однако теперь вооруженные таким мощным орудием, как законы Ньютона, вы можете вычислять не только такие простые явления, как качание грузика, но и неимоверно сложные движения планет, причем с любой желаемой точностью! Нужна только машина, знающая арифметику.

Глава 10

ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ ИМПУЛЬСА

§ 1. Третий закон Ньютона

Второй закон Ньютона, который связывает ускорение любого тела с действующей на него силой, позволяет хотя бы в принципе решить любую механическую задачу. Можно, например, с помощью числового метода, знакомого вам уже по предыдущей главе, определить движение нескольких частиц. Однако имеется еще достаточно причин, чтобы продолжить изучение законов Ньютона. Во-первых, существуют такие сравнительно простые случаи движения, которые можно изучать не только числовым путем, но и с помощью прямых математических методов. Вы знаете, например, что ускорение свободно падающего тела постоянно и равно 9,8 *м/сек*². Исходя из этого, можно было бы численно восстановить всю картину движения, однако гораздо проще и удобнее с помощью математического анализа найти общее решение: $s = s_0 + v_0t + 4{,}9t^2$. То же самое относится и к гармоническому осциллятору, расчету которого была посвящена часть предыдущей главы. Можно было бы просто аналитически доказать, что функция $\cos t$ является точным решением этой задачи, поэтому нет необходимости в арифметических упражнениях, если ответ можно получить более простым и строгим методом.

Одна из таких задач — движение планеты вокруг Солнца. Можно, конечно, так же, как мы это делали в гл. 9, постепенно найти общую форму орбиты, однако и эта задача решается точно, причем в результате получается строго эллиптическая орбита.

Но, к сожалению, таких задач, которые могут быть точно решены с помощью анализа, очень мало. В том же гармоническом осцилляторе, например, если сила пружины не будет пропорциональна отклонению от положения равновесия, а окажется несколько сложнее, мы уже не сможем ничего поделать и вынуждены обращаться к численному расчету. Или, например, если вокруг Солнца вращается не одна планета, а две (т. е. имеются всего три тела, взаимодействующих друг с другом), то нам не удастся найти аналитическую форму такого движения и на деле задача тоже решается численно. Это знаменитая проблема трех тел, над которой в течение долгого времени бились лучшие умы человечества. Интересно, что, пока люди поняли ограниченные возможности математического анализа и необходимость использования числовых методов, потребовалось немало времени. Сейчас с помощью этих методов решается огромное количество задач, которые не могли быть решены аналитически. Та же знаменитая проблема трех тел, решение которой, как полагали, очень сложно, в числовом методе выглядит самой заурядной задачкой и решается способом, описанным в предыдущей главе, т. е. с помощью большого числа арифметических действий. Однако имеются ситуации, когда оба метода оказываются бессильны: простые задачи решаются аналитически, а задачи посложнее — числовым арифметическим методом, но очень сложные задачи невозможно решить ни так, ни этак. Возьмите, например, сложную задачу столкновения двух автомобилей или даже движение молекул газа. В кубическом миллиметре газа содержится бесчисленное количество частиц, и было бы безумием пытаться решать задачу со столькими переменными (около 10^{17}, т. е. сто миллионов миллиардов!). Столь же сложна задача о движении звезд в шаровом скоплении, где вместо двух или трех планет, движущихся вокруг Солнца, собрано громадное количество звезд. Эти проблемы нельзя решить прямыми методами, и нужно изыскать какие-то другие пути.

При таком положении, когда детальное рассмотрение невозможно, полезно знать некоторые общие свойства, т. е. общие теоремы или принципы, которые являются следствием законов Ньютона. Один из таких принципов — это закон сохранения энергии, который мы обсуждали в гл. 4. Вторым принципом является закон сохранения импульса, которому посвящена настоящая глава. Другая причина необходимости дальнейшего изучения механики — это существование некоторых общих свойств движения, которые повторяются при различных обстоятельствах; так что полезно изучить это свойство на каком-то одном частном случае. Мы, например, будем изучать столкновения; различные виды столкновений имеют много общего. Или возьмем течение жидкости, неважно какой; законы течения разных жидкостей имеют много общего. Еще один пример, который мы будем изучать, это колебания, или осцилляции, в частности свойства механических волн: звука, колебания стержней и т. д.

Когда мы обсуждали законы Ньютона, то уже говорили о том, что они являются своего рода программой, которая призывает нас обратить особое внимание на силы. Но о самих силах Ньютон сказал только две вещи. Он полностью сформулировал закон для сил тяготения, но почти ничего не знал о более сложных силах, например о силах между атомами. Однако он открыл одно правило, одно общее свойство всех сил, которое составляет Третий закон. Таким образом, все, что Ньютон знал о природе сил,— это закон тяготения и общий принцип, который гласит:

Сила действия равна силе противодействия.

Означает это примерно следующее. Пусть имеются два маленьких тела, скажем две частицы, и пусть первая из них толкает вторую с некоторой силой. Тогда в соответствии с Третьим законом Ньютона вторая частица будет толкать первую с той же силой, но в противоположную сторону. Более того, эти силы будут действовать вдоль одной и той же линии. Эта гипотеза, или, если хотите, закон, предложенный Ньютоном, выполняется с большой точностью, хотя, впрочем, он не абсолютно точен (с нарушениями его мы познакомимся позднее). Сейчас, однако, мы будем считать его совершенно точным. Разумеется, если есть еще третья частица, которая расположена не на той же линии, что две первые, то закон вовсе *не означает*, что сила, действующая на первую частицу, равна полной силе, действующей на вторую. Ведь эта третья частица может толкать две первые, в результате чего полная сила, действующая на первую частицу, будет направлена по-другому и, вообще говоря, не будет ни равна, ни противоположна силе, действующей на вторую частицу. Однако полная сила, действующая на каждую из частиц, может быть разложена на две составляющие, которые представляют собой силы, действующие между каждой парой частиц. Эти компоненты силы для каждой *пары* частиц должны быть равны по величине и противоположны по направлению.

§ 2. Закон сохранения импульса

Давайте посмотрим, чем интересен Третий закон Ньютона. Предположим для простоты, что имеются только две взаимодействующие частицы — частица 1 и частица 2, масса которых может быть различна. К какому следствию приводит равенство и противоположная направленность сил между ними? Согласно

Второму закону, сила равна скорости изменения импульса со временем, так что скорость изменения импульса частицы 1 равна скорости изменения импульса частицы 2, т. е.

$$\frac{d\mathbf{p}_1}{dt} = -\frac{d\mathbf{p}_2}{dt}. \qquad (10.1)$$

Но если *скорости изменения* все время равны по величине и противоположны по направлению, то и *полное изменение* импульса частицы 1 равно и противоположно *полному изменению* импульса частицы 2. Это означает, что если мы *сложим* эти импульсы, то скорость изменения суммы под воздействием одних только взаимных сил (их обычно называют внутренними силами) будет равна нулю, т. е.

$$\frac{d(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2)}{dt} = 0. \qquad (10.2)$$

Напомним еще раз, что в нашей задаче мы предполагаем отсутствие каких-либо других сил, кроме внутренних. Но равенство нулю скорости изменения этой суммы означает просто, что величина $(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2)$ не изменяется с течением времени. (Эта величина записывается также в виде $m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2$ и называется *полным импульсом* двух частиц.) Таким образом, мы получили, что при наличии одних только внутренних сил полный импульс двух частиц остается неизменным. Это утверждение выражает закон сохранения полного импульса в данном случае. Из него следует, что если мы измеряем или подсчитываем величину $m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2$, т. е. сумму импульсов двух частиц, то для любых сил, действующих между ними, как бы сложны они ни были, мы должны получить одинаковый результат как до действия сил, так и после, т. е. полный импульс остается постоянным.

Рассмотрим теперь картину посложнее, когда есть три или большее число взаимодействующих частиц. Очевидно, что если существуют только внутренние силы, то полный импульс всех частиц остается постоянным, поскольку увеличение импульса одной частицы под воздействием другой частицы в точности компенсируется уменьшением импульса этой второй частицы из-за противодействия первой, т. е. внутренние силы так сбалансированы, что полный импульс всех частиц измениться не может. Таким образом, если нет сил, действующих на систему извне (внешних сил), то ничто не может изменить ее полный импульс и, следовательно, он остается постоянным.

Но нужно еще сказать о том, что произойдет, если будут еще существовать какие-то другие силы, кроме сил взаимодействия между частицами. Предположим, что мы изолировали систему взаимодействующих частиц. Если имеются только взаимные силы, полный импульс, как и прежде, меняться не будет, сколь бы сложны ни были эти силы. Если, однако, существуют силы, обусловленные частицами вне этой изолированной группы, то, как мы докажем позднее, сумма всех этих *внешних* сил равна скорости изменения полного импульса всех внутренних частиц. Это очень полезная теорема.

Закон сохранения полного импульса некоторого числа взаимодействующих частиц в отсутствие внешних сил можно записать в виде

$$m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2 + m_3\mathbf{v}_3 + \ldots = \mathrm{const}, \qquad (10.3)$$

где m_i и $\mathbf{v}_i$ — просто масса и скорость частицы соответствующего номера. Однако для каждой из этих частиц Второй закон Ньютона

$$\mathbf{f} = \frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) \qquad (10.4)$$

пишется для любой *составляющей* полной силы и импульса в любом заданном направлении, так что x-компонента силы, действующей на частицу, равна скорости изменения x-компоненты импульса этой частицы

$$f_x = \frac{d}{dt}(mv_x). \qquad (10.5)$$

Точно такие же формулы можно написать для y- и z-компонент. Это означает, что уравнение (10.3) фактически представляет собой три уравнения: по одному на каждую из компонент.

Существует еще одно интересное следствие Второго закона Ньютона, кроме закона сохранения импульса. Доказательством его мы будем заниматься позднее, а сейчас я просто расскажу вам о нем. Следствие или, скорее, принцип состоит в том, что законы физики не изменяются от того, стоим ли мы на месте или движемся равномерно и прямолинейно. Пусть, например, на быстро летящем самолете ребенок играет с мячиком. Наблюдательный ребенок сразу заметит, что мячик прыгает точно так же, как и на земле. Иначе говоря, законы движения для ребенка в самолете (если только последний не меняет скорости) выглядят одинаково как на поле аэродрома, так и в полете. Этот факт известен под названием *принципа относительности*. В том виде, в котором он рассматривается здесь, мы будем называть его «принципом относительности Галилея» или «галилеевской относительностью», чтобы не путать его с более тщательным анализом, проделанным Эйнштейном, но об этом несколько позже.

Таким образом, из закона Ньютона мы вывели закон сохранения импульса, а теперь давайте посмотрим, какие специфические законы описывают соударение и рассеяние частиц. Однако для разнообразия, а также чтобы продемонстрировать типичные рассуждения, которыми мы часто пользуемся в физике в других случаях, когда, скажем, не известны законы

Ньютона и должен быть принят иной метод рассмотрения, давайте обсудим законы рассеяния и соударения с совершенно другой точки зрения. Мы будем исходить из принципа относительности Галилея и в конце рассуждений придем к закону сохранения импульса.

Итак, начнем с утверждения, что законы природы не изменяются от того, что мы движемся прямолинейно с некоторой скоростью или стоим на месте. Однако прежде чем обсуждать процессы, в которых два тела сталкиваются и слипаются или разлетаются в стороны, давайте рассмотрим случай, когда эти два тела связаны между собой пружинкой или чем-то в этом роде, а затем вдруг освобождаются и разлетаются под действием этой пружинки или, быть может, небольшого взрыва в разные стороны. Кроме того, рассмотрим движение только в одном направлении. Предположим сперва, что эти два тела совершенно одинаковы и расположены симметрично. Когда между ними произойдет взрыв, одно из них полетит направо с некоторой скоростью v. Тогда естественно, что другое полетит налево с той же самой скоростью v, поскольку оба тела подобны и нет никаких причин считать, что левая сторона окажется предпочтительнее правой. Итак, с телами должно происходить нечто симметричное. Этот пример показывает, насколько полезны рассуждения такого рода в различных задачах. Но они не всегда столь ясны, когда затуманены формулами.

Таким образом, первый результат нашего эксперимента — одинаковые тела имеют одинаковую скорость. Но предположим теперь, что тела сделаны из различного материала, скажем один из меди, а другой из алюминия, но *массы* их равны. Мы будем предполагать, что если проделать наш опыт с двумя равными массами, то несмотря на то, что тела не одинаковы, скорости их тем не менее будут равны. В этом месте мне могут возразить: «Но ведь вы можете сделать и обратное. Вам незачем было это предполагать. Вы можете *определить* массы как равные, если они в нашем эксперименте приобретают одинаковую скорость». Давайте же примем это предложение и устроим небольшой взрыв между кусочком меди и очень большим куском алюминия, который настолько тяжел, что едва может быть сдвинут с места, тогда как медь стремительно отлетает. Это говорит о том, что алюминия слишком много. Уменьшим его количество и оставим лишь совсем маленький кусочек. Если устроить взрыв снова, то отлетит уже алюминий, а медь почти не сдвинется. Значит, сейчас слишком мало алюминия. Очевидно, что должно существовать какое-то промежуточное количество, которое можно постепенно подбирать, пока скорости разлета не станут равными. Теперь мы можем сказать, что раз равны скорости этих кусков, то массы их мы тоже будем считать равными (т. е. фактически мы переворачиваем сделанное ранее утверждение, что равные массы будут иметь одинаковую скорость). Самое интересное здесь то, что физический закон превращается просто в определение. Но тем не менее какой-то физический закон здесь все же есть, и если мы примем такое определение равенства масс, то этот закон можно найти следующим образом.

Пусть из предыдущего эксперимента нам известно, что два куска вещества A и B (медь и алюминий) имеют равные массы. Возьмем теперь третье тело, скажем кусок золота, и выравняем его массу (точно так же, как это делалось раньше) с массой меди. Если теперь в нашем эксперименте заменить медь золотом, то логически у нас нет никаких оснований утверждать, что эти массы (алюминия и золота) равны. Однако *опыт* показывает, что такое равенство имеет место. Таким образом, опытным путем мы обнаружили новый закон: если две массы порознь равны третьей (т. е. в нашем опыте они разлетаются с равными скоростями), то они равны между собой. (Этот закон вовсе *не следует* из подобного утверждения о величинах в *математике*; там оно просто постулируется.) Видите, как легко по неосторожности сделать безосновательное заключение. Утверждение, что массы равны, когда равны скорости,— это еще *не определение*; ведь при этом мы предполагаем справедливость математических законов равенства, что в свою очередь приводит к предсказанию результатов некоторых экспериментов.

Возьмем еще один пример. Пусть при некоторой силе взрыва установлено, что масса A равна массе B. А что произойдет, если увеличить силу взрыва? Будут ли равны скорости разлета в этом случае? Логика здесь снова бессильна, но опыт говорит, что это *действительно* так. Снова мы получаем закон, который утверждает: если из равенства скоростей двух тел делается заключение о равенстве их масс, то это равенство не зависит от величины скорости. Из этих примеров видно, что то, что сначала казалось просто определением, в действительности предполагает справедливость каких-то законов природы.

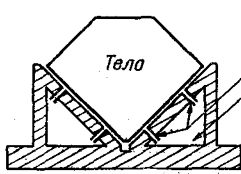
Итак, в дальнейших рассуждениях мы будем считать, что равные массы разлетаются в противоположные стороны с равными скоростями, если между ними происходит взрыв. А что произойдет, если мы обратим задачу, т. е. если два одинаковых тела, летящие навстречу друг другу с равными скоростями, сталкиваются и слипаются вместе? Как будут они двигаться? Здесь опять на помощь приходят соображения симметрии (т. е. что между левой и правой сторонами нет никакого различия), из которых следует, что образовавшееся тело должно стоять на месте. Мы будем также предполагать, что два тела с равной массой, летящих навстречу друг другу, даже если они сделаны из различного материала, после столкновения и слипания остановятся.

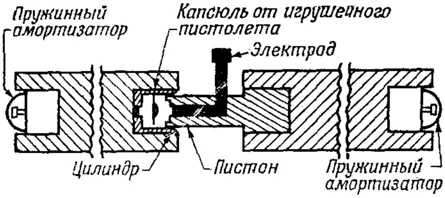
§ 3. Импульс все-таки сохраняется!

Можно экспериментально проверить наши предположения о том, что, во-первых, покоящиеся два тела с равной массой, разорванные взрывом, полетят в разные стороны с равной скоростью и, во-вторых, что два тела, обладающие равными скоростями и массами, при соударении и слипании останавливаются. Такую проверку можно сделать с помощью замечательного устройства — воздушного желоба (фиг. 10.1). В этом устройстве нет никаких трущихся деталей — вопрос, который очень беспокоил Галилея. Он не мог поставить эксперимента со скользящими телами, ибо они не скользили свободно, но с помощью чудесного желоба мы можем теперь избавиться от трения. Наши тела будут лететь без помех, а скорость их, согласно предвидению Галилея, будет оставаться постоянной. Это достигается тем, что тело поддерживается воздушной подушкой, а поскольку трение о воздух очень мало, то тело планирует практически с постоянной скоростью, если на него не действуют никакие силы. Возьмем сначала два скользящих бруска, вес или массы которых с большой точностью равны друг другу (практически измеряется вес, но он, как вы знаете, пропорционален массе), и поместим между ними небольшой взрыватель в закрытом цилиндре (фиг. 10.2). Всю эту систему устанавливаем в центре желоба и электрической искрой поджигаем взрыватель. Что же произойдет? Если массы брусков одинаковы, то они, разлетевшись в стороны, одновременно достигнут концов желоба. Там они отскакивают от ограничителей, сталкиваются и слипаются в центре, точно в том же месте, откуда разлетелись (фиг. 10.3). Это интересный опыт. И в действительности происходит все так, как мы рассказали.

Теперь на очереди проблема посложнее. Допустим, мы имеем две массы, причем одна движется со скоростью v, а другая стоит на месте. Затем первая ударяет по второй и они слипаются. Что произойдет дальше? Образуется одно тело с массой $2m$, которое как-то будет двигаться. Но с какой скоростью? Вот в чем вопрос. Чтобы ответить на него, предположим, что мы едем вдоль желоба на автомобиле. Все законы физики должны при этом выглядеть точно так же, как и прежде, когда мы стояли на месте. Мы начали с того, что если столкнуть два тела с равными массами и одинаковыми скоростями v, то после слипания

Фиг. 10.1. Воздушный желоб (вид с торца).



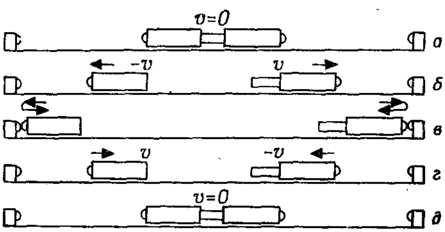


Фиг. 10.2. Продольный разрез скользящего бруска, скрепленного со взрывным цилиндром.

они останавливаются. А теперь представьте, что в это время мы катим на автомобиле со скоростью $-v$. Какую же картину мы увидим? Ясно, что одно из тел, поскольку оно все время летит рядом с автомобилем, будет казаться нам неподвижным. Второе же, которое движется навстречу со скоростью v, покажется нам несущимся с удвоенной скоростью $2v$ (фиг. 10.4). Наконец, образовавшееся после соударения и слипания тело будет казаться нам летящим со скоростью v. Отсюда мы делаем вывод, что если тело, летящее со скоростью $2v$, ударяется о покоящееся тело той же массы и прилипает к нему, то образовавшееся тело будет двигаться со скоростью v, или (что математически то же самое) тело со скоростью v, ударяясь о покоящееся тело той же массы и прилипая к нему, образует тело, движущееся со скоростью $v/2$. Заметьте, что если умножить массы тел на их скорости и сложить их, то получим одинаковый результат как до столкновения ($mv + 0$), так и после ($2m \cdot v/2$). Вот как обстоит дело, если тело, обладающее скоростью v, столкнется с телом, находящимся в покое.

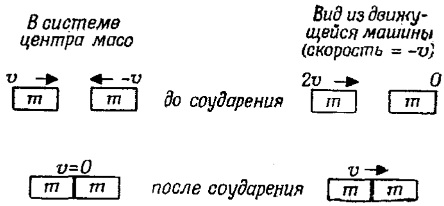
Точно таким же образом можно определить, что произойдет, когда сталкиваются два одинаковых тела, каждое из которых движется с *произвольной* скоростью.

Пусть одно тело летит со скоростью v_1, а другое — со скоростью v_2 в том же направлении ($v_1 > v_2$). Какова будет их скорость после соударения? Давайте снова сядем в машину и поедем, скажем, со скоростью v_2. Тогда одно из тел будет казаться нам стоящим на месте, а второе — налетающим на него со скоростью $v_1 - v_2$. Эта ситуация уже знакома нам, и мы знаем, что после соударения скорость нового тела по отношению к машине будет равна $^1/_2\,(v_1 - v_2)$. Что же касается действительной скорости относительно земли, то ее можно найти, прибавив



Фиг. 10.3. Схема эксперимента с равными массами.

Фиг. 10.4. Неупругое соударение равных масс.

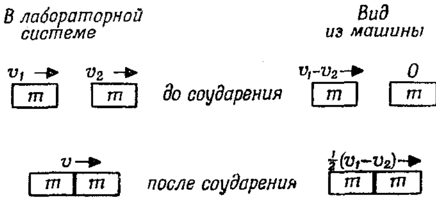


скорость автомобиля: $v = \frac{1}{2}(v_1 - v_2) + v_2$ или $\frac{1}{2}(v_1 + v_2)$ (фиг. 10.5). Обратите внимание, что снова

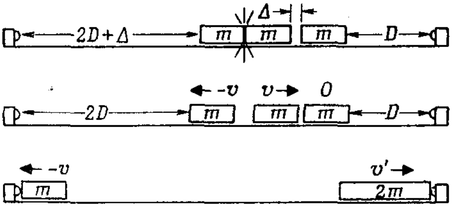
$$mv_1 + mv_2 = m \cdot \frac{1}{2}(v_1 + v_2). \tag{10.6}$$

Таким образом, принцип относительности Галилея помогает нам разобраться в любом соударении равных масс. До сих пор мы рассматривали движение в одном измерении, однако на основе его становится ясным многое из того, что будет происходить в более сложных случаях соударения: нужно только пустить автомобиль не вдоль направления движения тел, а под каким-то углом. Принцип остается тем же самым, хотя детали несколько усложняются.

Чтобы экспериментально проверить, действительно ли тело, летящее со скоростью v после столкновения с покоящимся телом той же массы, образует новое тело, летящее со скоростью $v/2$, проделаем на нашей замечательной установке следующий опыт. Поместим в желоб три тела с одинаковыми массами, два из которых соединены цилиндром со взрывателем, а третье находится вблизи одного из них, хотя и несколько отделено от него. Оно снабжено клейким амортизатором, так что прилипает к тому телу, которое ударяет его. В первое мгновение после взрыва мы имеем два объекта с массами m, движущимися со скоростью v каждое. В последующее мгновение одно из тел сталкивается с третьим и образует новое тело с массой $2m$, которое, как мы полагаем, должно двигаться со скоростью $v/2$. Но как проверить, что скорость его действительно $v/2$? Для этого мы вначале установим тела таким образом, чтобы расстояния до концов желоба относились как 2 : 1, так что первое тело, которое продолжает двигаться со скоростью v,



Фиг. 10.5. Другой случай неупругого соударения равных масс.

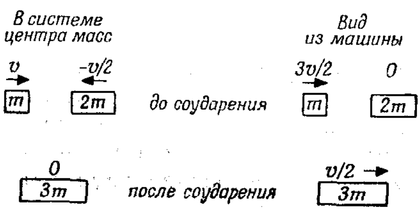


Фиг. 10.6. Экспериментальная проверка того факта, что масса m, ударяя со скоростью v массу m, образует тело с массой $2m$ и скоростью $v/2$.

должно пролететь за тот же промежуток времени вдвое большее расстояние, чем скрепившиеся два других тела (с учетом, конечно, того малого расстояния Δ, которое второе тело прошло до столкновения с третьим). Если мы правы, то массы m и $2m$ должны достичь концов желоба одновременно; так оно и происходит на самом деле (фиг. 10.6).

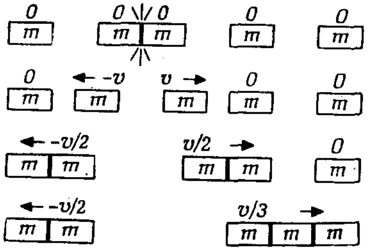
Следующая проблема, которую мы должны решить: что получится, если тела имеют разные массы. Давайте возьмем массы m и $2m$ и устроим между ними взрыв. Что произойдет тогда? С какой скоростью полетит масса $2m$, если масса m летит со скоростью v? Фактически нам нужно повторить только что проделанный эксперимент, но с нулевым зазором между вторым и третьим телом. Разумеется, что при этом мы получим тот же результат — скорости тел с массами m и $2m$ должны быть соответственно равны $-v$ и $v/2$. Итак, при разлете тел с массами m и $2m$ получается тот же результат, что и при симметричном разлете двух тел с массами m с последующим неупругим соударением одного из этих тел с третьим, масса которого тоже равна m. Более того, отразившись от концов, каждое из этих тел будет лететь с почти той же скоростью, но, конечно, в обратном направлении, и после неупругого соударения они останавливаются.

Перейдем теперь к следующему вопросу. Что произойдет, если тело с массой m и скоростью v столкнется с покоящимся телом с массой $2m$? Воспользовавшись принципом относительности Галилея, можно легко ответить на этот вопрос. Попросту говоря, нам нужно опять садиться в машину, идущую со скоростью $-v/2$ (фиг. 10.7), и наблюдать за только что описанным процессом. Скорости, которые мы при этом увидим,



Фиг. 10.7. Неупругое соударение между телами с массами m и $2m$.

Фиг. 10.8. Разлет тел с массами $2m$ и $3m$.



будут равны

$$v_1' = v - v_{\text{маш}} = v + \frac{v}{2} = \frac{3v}{2},$$

$$v_2' = -\frac{v}{2} - v_{\text{маш}} = -\frac{v}{2} + \frac{v}{2} = 0.$$

После соударения масса $3m$ покажется нам движущейся со скоростью $v/2$. Таким образом, мы получили, что отношение скоростей до и после соударения равно 3 : 1, т. е. образовавшееся тело с массой $3m$ будет двигаться в три раза медленней. И в этом случае снова выполняется общее правило: сумма произведений массы на скорость остается той же как до, так и после соударения: $mv + 0$ равно $3m \cdot v/3$. Вы видите, как постепенно шаг за шагом устанавливается закон сохранения импульса.

Итак, мы рассмотрели столкновение одного тела с двумя. Используя те же рассуждения, можно предсказать результаты столкновения одного тела с тремя телами, двух тел с тремя телами и т. д. На фиг. 10.8 как раз показан случай разлета масс $2m$ и $3m$ из состояния покоя.

В каждом из этих случаев выполняется одно и то же правило: масса первого тела, умноженная на его скорость, плюс масса второго тела, умноженная на его скорость, равны произведению полной массы на скорость ее движения. Все это — примеры сохранения импульса. Итак, начав с простого случая симметричных равных масс, мы установили закон сохранения для более сложных случаев. В сущности это можно сделать для любого рационального отношения масс, а поскольку любое число может быть со сколь угодно большой точностью заменено рациональным, то закон сохранения импульса справедлив для любых масс.

§ 4. Импульс и энергия

Во всех предыдущих примерах мы рассматривали только случаи, когда два тела сталкиваются и слипаются или с самого начала были скреплены вместе, а потом разделяются взрывом. Однако существует множество примеров соударений, в которых тела *не* сцепляются, как, например, столкновение двух тел равной массы и одинаковой скорости, которые затем разлетаются в разные стороны. На какой-то краткий миг они соприкасаются и сжимаются. В момент наибольшего сжатия они останавливаются и их кинетическая энергия полностью переходит в энергию упругого сжатия (они как две сжатые пружины). Эта энергия определяется из кинетической энергии, которой обладали тела до столкновения и которая равна нулю в момент их остановки. Однако кинетическая энергия теряется только на одно мгновение. Сжатое состояние, в котором находятся наши тела,— это все равно что заряд в предыдущих примерах, который при взрыве выделяет энергию. В следующее мгновение происходит нечто подобное взрыву — тела разжимаются, отталкиваются друг от друга и разлетаются в стороны. Эта часть процесса вам тоже хорошо знакома: тела полетят в разные стороны с одинаковыми скоростями. Однако скорости отдачи, вообще говоря, будут меньше тех начальных скоростей, при которых они столкнулись, ибо для взрыва используется не вся энергия, а только какая-то ее часть, но это уже зависит от свойств материала, из которого сделаны тела. Если это мягкий материал, то кинетическая энергия почти не выделяется, но если это что-то более упругое, то тела более охотно отскакивают друг от друга. Неиспользованный остаток энергии превращается в тепло и вибрацию, тела нагреваются и дрожат; впрочем, энергия вибрации тоже вскоре превращается в тепло. В принципе можно сделать тела из столь упругого материала, что на тепло и вибрацию не будет расходоваться никакой энергии, а скорости разлета в этом случае будут практически равны начальным. Такое соударение мы называем *упругим*.

Тот факт, что скорости *до* и *после* соударения равны,— заслуга не закона сохранения импульса, а закона *сохранения энергии*, но то, что скорости разлета после симметричного соударения равны *друг другу*, в этом уже повинен закон сохранения импульса.

Точно таким же способом можно разобрать случай соударения тел с различными массами, различными начальными скоростями, различными упругостями и определить конечные скорости и потерю кинетической энергии; но мы не будем сейчас подробно разбирать эти явления.

Упругое соударение особенно часто встречается между системами, у которых нет никаких внутренних механизмов, никаких «шестеренок, маховиков или других частей». В таких случаях кинетическая энергия не может ни на что растратиться: ведь разлетающиеся тела находятся в тех же условиях, что и налетающие. Поэтому между элементарными объектами соударение всегда или почти всегда упругое. Говорят, например, что соударение между атомами и молекулами абсолютно упругое. Хотя это действительно очень хорошее приближение, но и эти соударения не *абсолютно* упругие; в противном случае трудно было бы понять, откуда у газа берется энергия на излучение тепла и света. Иногда при столкновениях молекул газа испускаются инфракрасные лучи, однако это случается крайне редко и к тому же излученная энергия очень мала, так что для многих целей столкновения молекул газа можно рассматривать как абсолютно упругие.

Давайте разберем интересный пример *упругого* столкновения двух тел *равных масс*. Если такие тела ударяются друг о друга с какой-то равной скоростью, то по соображениям симметрии они должны разлететься в стороны с той же скоростью. Но давайте посмотрим на этот процесс в несколько другой ситуации, когда одно из тел движется со скоростью v, а другое покоится. Что произойдет в этом случае? Такая задача не нова для нас. Нужно посмотреть из автомобиля, движущегося рядом с одной из частиц, на симметричное соударение. Мы увидим, как движущееся тело столкнется с покоящимся и остановится, а то, которое раньше покоилось, полетит вперед, причем в точности с той же скоростью, с которой двигалось первое. Тела попросту обменяются своими скоростями. Это легко можно подтвердить экспериментально. Вообще если два тела движутся навстречу друг другу с различными скоростями, то при упругом соударении они просто обмениваются скоростями.

Другой пример почти абсолютно упругого взаимодействия дает нам магнетизм. Положите пару U-образных магнитов на наши скользящие бруски в воздушном желобе так, чтобы они отталкивались друг от друга. Если теперь потихоньку подтолкнуть один из брусков к другому, то он, не касаясь, оттолкнет его, а сам остановится. Второй же брусок полетит вперед.

Закон сохранения импульса — очень полезная штука. Он позволяет решить многие проблемы, не входя в детали процесса. Нас, например, совершенно не интересовали детали движения газа при взрыве заряда, но тем не менее мы могли предсказать, во сколько раз одно тело будет двигаться быстрее второго при их разлете. Другой интересный пример — это ракетный двигатель. Ракета большой массы M с огромной скоростью V (относительно самой ракеты) извергает сравнительно небольшое количество m газа. Чтобы сохранить импульс, ракета начинает двигаться с небольшой скоростью v. Используя закон сохранения импульса, можно подсчитать, что

$$v = \frac{m}{M} V.$$

Однако по мере извержения скорость ракеты становится все больше и больше. Механизм действия ракетного двигателя в точности сходен с явлением отдачи ружья; здесь не нужен воздух, чтобы отталкиваться от него.

§ 5. Релятивистский импульс

Уже на нашей памяти закон сохранения импульса претерпел некоторые изменения. Они, однако, не коснулись самого закона как такового, просто изменилось понятие импульса. В теории относительности, как оказалось, импульс уже не сохраняется, если его понимать так же, как и прежде. Дело в том, что масса не остается постоянной, а *изменяется в зависимости от скорости*, а потому изменяется и импульс. Это изменение массы происходит по закону

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \tag{10.7}$$

где m_0 — масса покоящегося тела, c — скорость распространения света. Из этой формулы видно, что при обычных скоростях (если v не очень велико) m очень мало отличается от m_0, а импульс поэтому с очень хорошей точностью выражается старой формулой.

Компоненты импульса для одной частицы можно записать в виде

$$p_x = \frac{m_0 v_x}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad p_y = \frac{m_0 v_y}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad p_z = \frac{m_0 v_z}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \tag{10.8}$$

где $v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$. Если просуммировать x-компоненты импульсов всех взаимодействующих частиц, то эта сумма как до столкновения, так и после окажется одной и той же. Это и есть закон сохранения импульса в направлении оси x. То же можно сделать и в любом другом направлении.

В гл. 4 мы уже видели, что закон сохранения энергии неверен, если мы не признаем эквивалентности энергии во всех ее формах, т. е. электрической энергии, механической энергии, энергии излучения, тепловой и т. д. Про некоторые из этих форм, например тепло, можно сказать, что энергия «скрыта» в них. Напрашивается вопрос: а не существуют ли также «скрытые» формы импульса, скажем «тепловой импульс»? Дело в том, что импульс утаить невозможно; скрыть его очень трудно по следующим причинам.

Мера тепловой энергии — случайного движения атомов тела — представляет собой просуммированные *квадраты* их скоростей. В результате получается некоторая положительная величина, не имеющая направленного характера. Так что тепло как бы заключено внутри тела независимо от того, движется ли оно как целое или нет. Поэтому сохранение энергии в тепловой форме не очень очевидно. С другой стороны, если мы просуммируем *скорости*, которые имеют направление, и в результате получим не нуль, то это означает, что само тело целиком движется в некотором направлении, а такое макродвижение мы уже способны наблюдать. Так что никакой случайной внутренней потери импульса не существует: тело обладает определенным импульсом, только когда оно движется целиком. В этом и состоит основная причина того, что импульс трудно скрыть. Но тем не менее скрыть его все же *можно*, например в электромагнитное поле. Это еще одна из особенностей теории относительности.

Ньютон считал, что взаимодействие на расстоянии должно быть мгновенным. Но это, оказывается, неверно. Возьмем, например, электрические силы. Пусть электрический заряд, расположенный в некоторой точке, вдруг начинает двигаться, тогда его действие на другой заряд в другой точке не будет мгновенным: существует небольшое запаздывание. При таком положении, даже если силы действия и противодействия равны между собой, импульсы не будут компенсироваться. Существует небольшой промежуток времени, в течение которого будет происходить нечто странное; в то время как первый заряд испытывает какое-то воздействие силы и реагирует на нее изменением своего импульса, второй стоит как ни в чем не бывало и не изменяет импульса. На передачу влияния второму заряду через разделяющее их расстояние требуется некоторое время: «влияние» распространяется не мгновенно, а с некоторой конечной (хотя и очень большой) скоростью 300 000 *км/сек*. В течение этого крохотного промежутка времени импульс частиц не сохраняется. Но, разумеется, после того как второй заряд испытает влияние первого, импульсы компенсируются, наступает полный порядок, но все-таки в течение некоторого момента закон был нарушен. Мы представляем дело таким образом, что в течение этого интервала существует импульс другого рода, чем импульс частиц $m\mathrm{v}$, и это импульс электромагнитного поля. Если сложить его с импульсами частиц, то эта сумма в любой момент сохраняется. Однако тот факт, что электромагнитное поле может обладать импульсом и энергией, делает его реальностью, а утверждение о том, что между частицами действуют силы, переходит в утверждение о том, что частица создает поле, которое в свою очередь действует на другую частицу. Само же поле имеет многие свойства, аналогичные частицам; оно может нести энергию и импульс. Для иллюстрации рассмотрим еще один пример; в электромагнитном поле могут существовать волны, которые мы называем светом. И вот оказывается, что свет тоже несет какой-то импульс, так что когда он падает на предмет, то передает ему некоторое количество своего импульса. Это эквивалентно действию какой-то силы, ведь освещенный предмет изменяет свой импульс, как будто на него действует некоторая сила. Итак, падая на предмет, свет оказывает на него давление. Хотя это давление очень мало, но достаточно тонкими приборами его все же можно измерить.

Оказывается, что в квантовой механике импульс тоже не mv, а нечто совсем другое. Здесь уже трудно определить точно, что же такое скорость частицы, но импульс все-таки существует. Разница же состоит в том, что когда частицы действуют как частицы, то их импульс по-прежнему mv, но когда они действуют как волны, то импульс уже измеряется числом волн на 1 *см*: чем больше волн, тем больше импульс. Однако, несмотря на это различие, закон сохранения импульса справедлив и в квантовой механике. Неверными оказались уравнение Ньютона $f = ma$ и все его выводы закона сохранения импульса, тем не менее в квантовой механике в конце концов этот закон продолжает действовать!

Глава 11

ВЕКТОРЫ

§ 1. Симметрия в физике

В этой главе мы вводим понятие, которое среди физиков известно под названием *симметрия законов физики*. Слово «симметрия» употребляется здесь в несколько необычном смысле, и поэтому нужно его определить. Как же определить симметрию какого-либо предмета? Когда мы говорим, что изображение симметрично, то этим мы хотим сказать, что одна его часть такая же, как другая. Профессор Герман Вейль дал такое определение симметрии: предмет симметричен, если его можно подвергнуть какой-либо операции, после которой он будет выглядеть как и вначале. Например, если мы повернем вазу на 180° вокруг вертикальной оси и она не изменит своего внешнего вида, то мы говорим, что обе стороны вазы симметричны. Мы будем понимать определение Вейля в более широком смысле и говорить о симметрии законов физики.

Предположим, что где-то мы установили сложную машину со множеством зацеплений, с какими-то маховиками, шатунами и т. п. Предположим теперь, что в каком-то другом месте мы собрали такое же устройство, все части которого являются точной копией частей прежней машины, причем сохранены все размеры и ориентация отдельных ее частей, все то же самое, только перенесено на некоторое расстояние. Затем мы запустим обе машины в одинаковых условиях и посмотрим, будут ли они работать совершенно одинаково? Будут ли движения отдельных частей одной машины повторять в точности соответствующие движения другой? Вообще говоря, ответ может быть *отрицательным*, потому что мы можем ведь выбрать для второй машины неудачное место, скажем поставить ее так, что какие-то ее части будут при работе ударяться о стенку, тогда машина вовсе не будет работать.

Любая физическая идея требует здравого смысла при своем осуществлении, ведь это не чисто математические или абстрактные идеи. Нужно понимать, что́ мы имеем в виду, когда говорим, что при перенесении какого-либо устройства в другое место наблюдаются те же явления. Под этим мы понимаем, что мы передвигаем все, что можно передвинуть. Если же при этом явление в чем-то изменяется, то мы предположим, что что-то послужило помехой, и займемся изучением причин. Если мы ничего не обнаружим, то объявим, что физические законы не обладают ожидаемой симметрией. Но если физические законы все-таки обладают симметрией, то мы найдем причину помех, во всяком случае мы надеемся найти ее. Осмотревшись, мы обнаружим, например, что работе машины мешает стена. Основной вопрос состоит в следующем: если мы достаточно хорошо изучим наши устройства, если все основные источники сил имеются внутри аппарата и если на другое место передвинуть все, что следовало передвинуть, то будут ли законы меняться? Будет ли машина на новом месте работать так, как раньше?

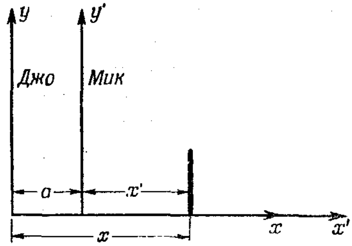
Ясно, что мы хотим передвинуть само устройство и источники *основных* влияний, а вовсе не *все* на свете — планеты, звезды и т. п., ибо если бы мы и совершили эту грандиозную работу, то наблюдали бы прежнее явление по той простой причине, что мы оказались бы на том же самом месте. Но мы и не можем передвинуть *все на свете.* Оказывается, что если передвигать наше устройство более или менее разумно, то оно будет работать одинаково. Другими словами, если мы не будем вламываться в стенку, будем знать происхождение внешних сил и постараемся, чтобы они были передвинуты вместе с машиной, то она будет работать на новом месте так же хорошо, как и прежде.

§ 2. *Переносы начала*

Мы ограничим наше рассмотрение законами механики, которую достаточно хорошо изучили. В предыдущих главах мы установили, что законы механики можно свести к трем справедливым для любой частицы уравнениям:

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=F_x,\qquad m\frac{d^2y}{dt^2}=F_y,\qquad m\frac{d^2z}{dt^2}=F_z. \qquad (11.1)$$

Это означает, что существует такой способ *измерения* расстояний x, y и z вдоль трех взаимно перпендикулярных осей и сил вдоль этих направлений, при котором определяемые уравне-



Фиг. 11.1. Две параллельные координатные системы.

ниями (11.1) законы верны. Расстояния должны отсчитываться от некоторого начала, но *где следует расположить это начало*? Ньютон сказал нам только, что такая точка, от которой можно начать отсчет, *существует*; может быть, это центр Вселенной, и при измерении расстояний от нее его законы верны. Но мы можем немедленно показать, что незачем искать центр Вселенной, ибо безразлично, какую точку взять за начало координат. Иными словами, предположим, что имеются два человека — Джо, который выбрал начало своей системы координат в какой-то точке, и Мик, который построил систему координат, параллельную первой, но принял за начало другую точку (фиг. 11.1), расположенную на расстоянии a по оси x в его системе.

Когда Джо определяет положение произвольной точки в пространстве, он находит три ее координаты: x, y и z (обычно мы опускаем ось z, ибо ее трудно изобразить на нашем чертеже). В системе Мика эта точка будет иметь другое значение x (чтобы отличить его, введем обозначение x') и, вообще говоря, другое значение y, хотя в нашем примере они численно равны. Таким образом, мы имеем

$$x' = x - a, \qquad y' = y, \qquad z' = z. \tag{11.2}$$

Чтобы сделать наш анализ полным, нужно знать, какие силы измеряет Мик. Если сила действует вдоль произвольной линии, то под силой вдоль направления x мы понимаем некоторую часть общей силы, которая равна произведению величины силы на косинус угла между направлением силы и осью x. Легко видеть, что Мик получит те же проекции силы, какие получил Джо, т. е. мы имеем систему уравнений

$$F_{x'} = F_x, \qquad F_{y'} = F_y, \qquad F_{z'} = F_z. \tag{11.3}$$

Уравнения (11.2) и (11.3) определяют соотношения между величинами, используемыми Джо и Миком.

Теперь поставим вопрос так: если Джо знает законы Ньютона, то будут ли они верны, когда их попробует использовать Мик? Имеет ли значение выбор начала координат? Другими словами, предположим, что уравнения (11.1) верны, а (11.2) и (11.3) определяют соотношения между измеряемыми величинами; верно ли, что

$$m\left(\frac{d^2x'}{dt^2}\right)=F_{x'}, \tag{11.4а}$$

$$m\left(\frac{d^2y'}{dt^2}\right)=F_{y'}, \tag{11.4б}$$

$$m\left(\frac{d^2z'}{dt^2}\right)=F_{z'}? \tag{11.4в}$$

Чтобы проверить эти уравнения, дважды продифференцируем выражение для x' по времени. Прежде всего

$$\frac{dx'}{dt}=\frac{d}{dt}(x-a)=\frac{dx}{dt}-\frac{da}{dt}.$$

Предположим теперь, что начало системы координат, которой пользуется Мик, фиксировано (не движется) относительно системы координат Джо, т. е. a постоянна и $da/dt = 0$; таким образом, получаем

$$\frac{dx'}{dt}=\frac{dx}{dt}$$

и, следовательно,

$$\frac{d^2x'}{dt^2}=\frac{d^2x}{dt^2}.$$

Если предположить, что измеряемые Джо и Миком массы равны, то уравнение (11.4а) принимает вид

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=F_{x'}.$$

Таким образом, произведения массы на ускорение одинаковы у обоих друзей. Можно получить и формулу для $F_{x'}$. Использовав (11.1), мы обнаружим

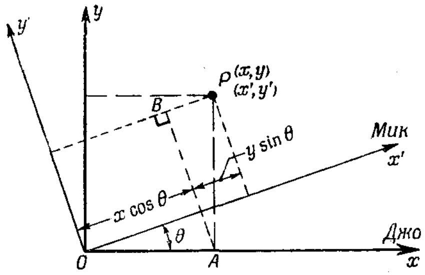
$$F_{x'}=F_x.$$

Следовательно, законы механики, с точки зрения Мика, точно такие же: он пишет законы Ньютона в других координатах, и эти законы оказываются верными. Это означает, что центра Вселенной нет и законы движения выглядят одинаково, с какого бы места они ни наблюдались.

Верно и такое утверждение: если в каком-либо месте установить устройство с каким-то механизмом, то и в любом другом месте это устройство будет работать одинаково. Почему? Потому что любая машина, которую изучает Мик, подчиняется тем же уравнениям, которые описывают работу машины, контролируемой Джо. Поскольку *уравнения* одинаковы, то и *явления* одни и те же. Таким образом, доказательство того, что аппарат в новом месте будет работать так же, как на прежнем, сводится к доказательству, что отнесенные к новой точке пространства уравнения воспроизводят себя. Поэтому мы говорим, что *законы физики симметричны относительно перемещений в пространстве*, симметричны в том смысле, что законы не изменяются при перемещениях начала системы координат. Конечно, каждый интуитивно знает, что это верно, но интересно и полезно обсудить математику этого явления.

§ 3. *Вращения*

Разобрав вопрос о перенесении начала координат, мы рассмотрели первую задачу из серии более сложных теорем о симметрии физических законов. Следующая теорема утверждает, что и *направления* координатных осей можно выбрать произвольно. Другими словами, если мы сооружаем где-то какое-то устройство и наблюдаем, как оно работает, а затем по соседству соорудим аналогичное устройство, но расположим его под любым углом относительно первого, то будет ли второе устройство работать так же, как и первое? Вообще говоря, нет, если это, например, старые часы-ходики, известные еще нашим дедам. Если маятник ходиков расположен отвесно, они будут великолепно идти, но если их повернуть так, чтобы маятник уперся в стенку, верного времени они уже не покажут. Значит, нашу теорему нельзя применить к маятнику, если забыть о силе, которая заставляет его качаться. Если мы все-таки верим в симметрию физических законов относительно вращений, то мы должны сделать какие-то вполне определенные предположения о работе ходиков, например что для их работы важен не только часовой механизм, но и что-то, лежащее за его пределами, что-то, что следует обнаружить. Можно также предсказать, что ходики будут идти по-разному, если они попадут куда-то в другое место по отношению к загадочному пока источнику асимметрии (может быть, это Земля). Так и есть на самом деле. Мы знаем, что ходики на искусственном спутнике, например, вообще остановятся, ибо там отсутствует эффективная сила, а на Марсе скорость их хода будет совсем иной. Маятниковые часы содержат, помимо механизма, еще нечто вне их. Осознав этот факт, мы увидим, что вместе с ходиками нам придется повернуть и Землю. Но нам, конечно, незачем беспокоиться — сделать это очень легко. Мы просто подождем минуту или две, и Земля сама повернется, а ходики затикают уже в новом положении так же весело, как и раньше. Пока мы поворачиваемся в пространстве, измеряемые нами углы изменяются тоже; эти изменения не причиняют особых беспокойств, поскольку в новых условиях мы чувствуем себя точно так же, как и в старых. Здесь может скрываться источник ошибки; верно, что в новом, повернутом относительно старого положении зако-



Фиг. 11.2. Две координатные системы, ориентированные по-разному.

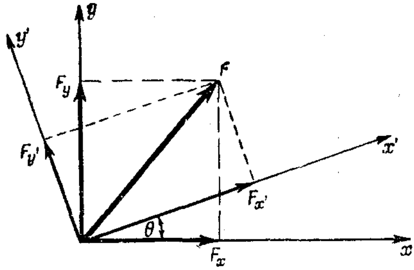
ны остаются прежними, но *неверно* то, что *во вращающейся* системе координат справедливы те же законы, что и в покоящейся. Если проделать достаточно тонкие опыты, то можно установить, что Земля *вращается*, но ни один из этих опытов не скажет нам, что Земля *повернулась*. Другими словами, мы не можем при помощи этих опытов установить ориентацию Земли, но можем сказать, что ориентация изменяется.

Обсудим теперь влияние ориентации системы координат на физические законы. Давайте посмотрим, не будут ли нам снова полезны Мик и Джо. Чтобы избежать ненужных сложностей, предположим, что эти молодые люди находятся в одной точке пространства (мы уже показали, что их системы координат можно перемещать). Пусть оси системы координат Мика повернуты относительно системы координат Джо на угол θ. Обе системы координат изображены на фиг. 11.2, где мы ограничились двумя измерениями. Произвольная точка P снабжается координатами (x, y) в системе Джо и (x', y') в системе Мика. Как и в предыдущем случае, начнем с того, что выразим координаты x' и y' через x, y и θ. Для этого опустим из P перпендикуляры на все четыре координатные оси и проведем AB перпендикулярно PQ. Из чертежа ясно, что x' можно представить как сумму двух отрезков вдоль оси x', а y' — как разность двух отрезков вдоль AB. Длины этих отрезков выражаются через x, y и θ; мы добавляем еще уравнение для третьей координаты:

$$\begin{aligned} x' &= x\cos\theta + y\sin\theta, \\ y' &= y\cos\theta - x\sin\theta, \\ z' &= z. \end{aligned} \tag{11.5}$$

Теперь (мы поступали так и раньше) установим соотношения между силами, измеряемыми двумя наблюдателями. Предположим, что сила F, имеющая (с точки зрения Джо) составляющие F_x и F_y, действует на расположенную в точке P на фиг. 11.2 частицу массы m. Для простоты сдвинем обе системы координат так, что начала их переместятся в точку P, как показано на фиг. 11.3. Мик скажет нам, что сила, по его мнению, имеет составляющие $F_{x'}$ и $F_{y'}$ вдоль его осей. Составляющая F_x, как и

Фиг. 11.3. Составляющие силы в двух системах.



F_y, имеет составляющие вдоль обеих осей x' и y'. Чтобы выразить $F_{x'}$ через F_x и F_y, сложим составляющие этих сил вдоль оси x'; точно таким же образом можно выразить и $F_{y'}$ через F_x и F_y. В результате получим

$$\begin{aligned} F_{x'} &= F_x \cos\theta + F_y \sin\theta, \\ F_{y'} &= F_y \cos\theta - F_x \sin\theta, \\ F_{z'} &= F_z. \end{aligned} \tag{11.6}$$

Интересно отметить случайность, которая в дальнейшем окажется очень важной: формулы (11.5) и (11.6) для координат P и составляющих F соответственно *тождественны по форме.*

Как и раньше, предположим, что законы Ньютона справедливы в системе координат Джо и выражаются уравнениями (11.1). Снова возникает вопрос: может ли Мик пользоваться законами Ньютона, будут ли их предписания выполняться в повернутой системе координат? Другими словами, если предположить, что уравнения (11.5) и (11.6) дают связь между измеряемыми величинами, то верно ли, что

$$\begin{aligned} m\left(\frac{d^2x'}{dt^2}\right) &= F_{x'}, \\ m\left(\frac{d^2y'}{dt^2}\right) &= F_{y'}, \\ m\left(\frac{d^2z'}{dt^2}\right) &= F_{z'}? \end{aligned} \tag{11.7}$$

Чтобы проверить эти уравнения, вычислим левые и правые части независимо, а затем сравним результаты. Чтобы вычислить левые части, умножим уравнения (11.5) на m и продифференцируем их дважды по времени, считая угол θ постоянным. Это дает

$$\begin{aligned} m\left(\frac{d^2x'}{dt^2}\right) &= m\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)\cos\theta + m\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)\sin\theta, \\ m\left(\frac{d^2y'}{dt^2}\right) &= m\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)\cos\theta - m\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)\sin\theta, \\ m\left(\frac{d^2z'}{dt^2}\right) &= m\left(\frac{d^2z}{dt^2}\right). \end{aligned} \tag{11.8}$$

Вычислим правые части уравнений (11.7), подставив (11.1) в уравнения (11.6). Получаем

$$
\begin{aligned}
F_{x'} &= m\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)\cos\theta + m\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)\sin\theta,\\
F_{y'} &= m\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)\cos\theta - m\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)\sin\theta,\\
F_{z'} &= m\left(\frac{d^2z}{dt^2}\right).
\end{aligned}
\tag{11.9}
$$

Глядите! Правые части уравнений (11.8) и (11.9) тождественны; значит, если законы Ньютона верны в одной системе координат, то ими можно пользоваться и в другой системе. Эти рассуждения заставляют нас сделать некоторые важные выводы: во-первых, никто не может утверждать, что избранная им система координат единственна, она может быть, конечно, более *удобной* при решении частных задач. Например, удобно, но не обязательно взять направление силы тяжести за одну из осей координат. Во-вторых, это означает, что любой механизм, если только он является самостоятельным устройством и обладает всем необходимым для создания силы, будет работать одинаково, как бы его ни повернули.

§ 4. *Векторы*

Насколько нам известно сейчас, не только законы Ньютона, но и все физические законы обладают двумя свойствами, которые называют инвариантностью (или симметрией) относительно перемещений и поворотов координатных осей. Эти свойства столь важны, что для учета их при изучении физических законов была разработана специальная математическая техника.

Решение поставленных в предыдущих параграфах задач потребовало довольно длинных расчетов. Чтобы свести их к минимуму, изобретен могучий математический аппарат. Эта система, называемая *векторным анализом*, определила название главы, хотя в ней, собственно говоря, речь идет о симметрии физических законов. Конечно, можно получить искомый результат, поступая так, как было описано раньше, но, чтобы облегчить и ускорить нашу задачу, мы применяем технику векторного анализа.

Заметим, что в физике важно знать величины двух типов (на самом деле их больше двух, но давайте начнем с двух). Величины первого типа, например число картофелин в мешке, мы будем называть обыкновенными числами, или *скалярами*. Еще одним примером такой величины может служить температура. Другие очень важные в физике величины имеют направление, это, например, скорость; мы должны задать не только быстроту перемещения тела, но и путь, по которому оно движется. Импульс и сила тоже имеют направление, как и смещение: когда кто-нибудь делает шаг, можно сказать не только, как далеко он шагнул, но и *куда* он шагает, т. е. определить направление его движения.

Все величины, имеющие направление, подобно шагу в пространстве, называются *векторами*.

Вектор определяется тремя числами. Чтобы описать шаг, скажем из начала координат в точку P, определяемую координатами x, y и z, мы фактически должны задать три числа. Но мы будем использовать для этой цели один-единственный математический символ $\mathbf{r}$, с которым нам чаще всего придется иметь дело в дальнейшем *. Это *не одно число*: символ $\mathbf{r}$ задается тремя числами: x, y и z. Символ $\mathbf{r}$ означает три числа, но не только *эти* три числа, потому что при переходе к другой системе координат нужно заменить их числами x', y' и z'. Однако мы хотим как можно более упростить нашу математику и используем *один и тот же символ* в качестве представителя трех чисел x, y, z и трех чисел x', y', z'. Точнее говоря, мы используем один и тот же символ в качестве представителя первого набора чисел в одной системе координат и делаем его представителем второго набора чисел, если захотим сменить систему координат. Это удобно потому, что нам не придется изменять формы уравнений при переходе от одной системы координат к другой. Если мы записываем уравнения, используя координаты x, y и z, а затем меняем систему отсчета, то появляются координаты x', y' и z', но мы пишем просто $\mathbf{r}$, условившись, что этот символ служит представителем x, y, z, если мы пользуемся первой системой отсчета, и x', y', z', если мы перешли к другой системе. Три числа, которые описывают векторную величину в заданной системе отсчета, называются *составляющими* (компонентами) вектора в направлении координатных осей системы отсчета. Иначе говоря, мы используем один символ для обозначения трех букв, и он соответствует наблюдению *одного и того же объекта с трех разных точек зрения*. Произнося слова «один и тот же объект», мы обращаемся к нашей физической интуиции, которая говорит нам, что шаг в пространстве не зависит от того, какими составляющими мы его описываем. Итак, символ $\mathbf{r}$ представляет один и тот же объект независимо от того, как мы ориентируем оси системы отсчета.

Предположим теперь, что существует другая направленная величина, например сила — еще одна величина, которую можно определить, задав связанные с ней три числа. Эти три числа переходят при изменении системы координат в другие три числа по строго определенным математическим правилам. Эти пра-

---

* В книгах вектор обозначается полужирной буквой; в рукописях же используется стрелка: $\vec{\mathbf{r}}$.

вила должны быть теми же самыми, которые определяли переход тройки чисел x, y, z в x', y', z'. Другими словами, вектор — это величина, определяемая тремя числами, которые преобразуются при изменениях системы координат так же, как составляющие шага в пространстве. Уравнение типа

$$\mathbf{F}=\mathbf{r}$$

справедливо в *любой* системе координат, если оно верно хотя бы в одной из них. Оно заменяет нам три уравнения

$$F_x = x, \qquad F_y = y, \qquad F_z = z$$

или соответственно

$$F_{x'} = x', \qquad F_{y'} = y', \qquad F_{z'} = z'.$$

Тот факт, что физические соотношения между какими-либо величинами можно выразить в виде векторных уравнений, говорит о том, что эти соотношения верны в любой системе координат. Вот почему понятие вектора очень удобно в физике.

Давайте теперь рассмотрим некоторые свойства векторов. В качестве примера «вектора» можно указать скорость, импульс, силу и ускорение. Часто бывает удобно изобразить вектор в виде стрелки, указывающей направление действия. Но почему же можно представить силу стрелкой? Да потому, что она преобразуется по тем же законам, что и «шаг в пространстве». Именно поэтому можно представить силу в виде чертежа, как если бы это изображалось перемещение, причем выберем такой масштаб, чтобы единица силы, например ньютон, соответствовала некоторой длине. Проделав такую процедуру однажды, мы всегда сможем изображать силы в виде отрезков, потому что уравнение типа

$$\mathbf{F}=k\mathbf{r}$$

(где k — некоторая постоянная) имеет вполне определенный смысл. Возможность представлять силу отрезком сулит нам большие выгоды, потому что, изобразив отрезок или стрелку, можно не заботиться о координатных осях. При этом, конечно, всегда можно быстро подсчитать, как изменяются составляющие вектора при поворотах осей, потому что дело сводится к простому геометрическому построению.

§ 5. *Векторная алгебра*

Теперь мы должны описать законы, или правила, регулирующие возможные сочетания различных векторов. Прежде всего мы изучим *сумму* двух векторов. Пусть векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ задаются в какой-нибудь системе координат составляющими a_x, a_y, a_z и b_x, b_y, b_z. Предположим, что кому-то пришло в голову составить три числа $a_x + b_x$, $a_y + b_y$, $a_z + b_z$. Получим ли мы в результате вектор? Вы можете сказать: «Разумеется, ведь это три числа, а три числа образуют вектор». Нет, вектор образуют *не любые* три числа! Чтобы задать вектор, мы должны связать заданные нам три числа с координатной системой так, чтобы при повороте координатных осей эти числа «поворачивались» относительно друг друга и «перемешивались» по описанным ранее правилам. Таким образом, мы должны выяснить, во что превращаются числа $a_x + b_x$, $a_y + b_y$, $a_z + b_z$, если известно, что при изменении системы координат числа a_x, a_y, a_z переходят в a'_x, a'_y, a'_z, а b_x, b_y, b_z переходят в b'_x, b'_y, b'_z? Получим ли мы после поворота координатных осей числа $a'_x + b'_x$, $a'_y + b'_y$, $a'_z + b'_z$? Ответ, конечно, будет утвердительным, потому что наше основное уравнение (11.5) определяет так называемое *линейное* преобразование. Если мы применим это преобразование к a_x и b_x и вычислим $a'_x + b'_x$, то окажется, что преобразованное $a_x + b_x$ есть то же самое, что и $a'_x + b'_x$. «Складывая» векторы **a** и **b** по только что описанному правилу, мы получаем новый вектор **c**. Мы запишем это так:

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b}.$$

Вектор **c** обладает интересным свойством:

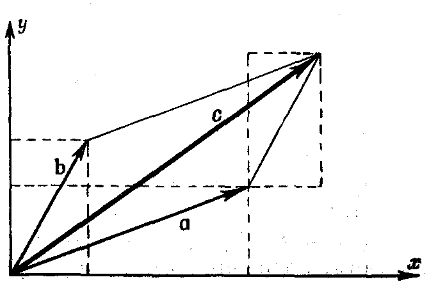
$$\mathbf{c} = \mathbf{b} + \mathbf{a};$$

это легко проверить, написав составляющие вектора **c**. Кроме того,

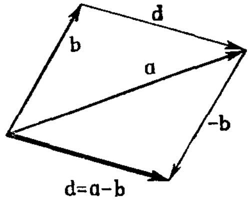
$$\mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c}.$$

Векторы можно складывать в любом порядке.

Каков геометрический смысл $\mathbf{a} + \mathbf{b}$? Как будет выглядеть вектор **c**, если мы, скажем, изобразим **a** и **b** с помощью стрелок? Ответ на этот вопрос дает фиг. 11.4. Мы видим, что прибавить составляющие вектора **b** к составляющим вектора **a** проще всего, приложив соответствующим образом прямоугольник, определяемый составляющими **b**, к такому же прямоугольнику, определяемому составляющими **a**. Поскольку **a** и **b** хорошо подогнаны к своим прямоугольникам, то это все равно, что по-



Фиг. 11.4. Сложение векторов.



Фиг. 11.5. Вычитание векторов.

ставить вектор **b** «ногами» на «голову» вектору **a**. Стрелка, соединяющая «ноги» вектора **a** и «голову» вектора **b**, и будет вектором **c**. Можно поступить иначе: поставить «ноги» **a** на «голову» **b**. Вспомнив геометрические свойства параллелограмма, можно убедиться в том, что мы снова получим тот же вектор **c**. Заметим, что, ставя векторы друг на друга, мы складываем их без помощи координатных осей.

Предположим, что мы умножили вектор **a** на число α. Что нужно понимать под таким произведением? Договоримся понимать под этим вектор с компонентами αa_x, αa_y, αa_z. Докажите сами, что это действительно вектор.

Рассмотрим теперь вычитание векторов. Можно определить вычитание тем же способом, что и сложение, но вместо того, чтобы складывать, будем вычитать составляющие. Можно также определить вычитание как сложение с отрицательным вектором $-\mathbf{b} = (-1)\mathbf{b}$. Результат будет тот же.

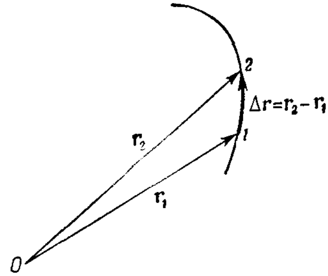
Вычитание векторов показано на фиг. 11.5. На этом чертеже изображено $\mathbf{d} = \mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{a} + (-\mathbf{b})$; заметим также, что, зная векторы **a** и **b**, разность $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ можно легко найти из эквивалентного соотношения $\mathbf{a} = \mathbf{b} + \mathbf{d}$. Таким образом найти разность векторов даже легче, чем сумму: просто нужно провести вектор, соединяющий **b** и **a**, и вы получите $\mathbf{a} - \mathbf{b}$!

Перейдем теперь к скорости. Почему скорость есть вектор? Если координаты точки равны x, y, z, то скорость ее равна dx/dt, dy/dt, dz/dt. Вектор это или не вектор? Дифференцируя выражение (11.5), можно найти *закон преобразования* dx'/dt. Видно, что величины dx/dt, dy/dt преобразуются по тому же закону, что и x и y. Таким образом, скорость *есть* вектор. Выражение для скорости можно записать очень интересно:

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}.$$

Постараемся нагляднее представить себе, что такое скорость и почему она вектор. Далеко ли продвинется частица за малое время Δt? *Ответ*: на $\Delta\mathbf{r}$, т. е. если частица находится «здесь» в первое мгновение, а «там» — во второе, то векторная разность положений частицы равна вектору $\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$, расположенному вдоль направления движения. Как это выгля-

Фиг. 11.6. Перемещение частицы за малое время $\Delta t = t_2 - t_1$.



дит, показано на фиг. 11.6. Если разделить этот вектор на промежуток времени $\Delta t = t_2 - t_1$, то мы получим вектор «средней скорости».

Иначе говоря, под вектором скорости мы понимаем предел разности радиус-векторов, соответствующих моментам $t+\Delta t$ и t, деленной на Δt при Δt, стремящемся к нулю:

$$\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}. \tag{11.10}$$

Скорость есть вектор постольку, поскольку она равна разности двух векторов. Это верно также и потому, что составляющие этого вектора равны dx/dt, dy/dt, dz/dt. Подумав над тем, что сейчас было проделано, мы придем к выводу, что, продифференцировав *любой* вектор по времени, мы снова получим какой-то новый вектор. Таким образом, имеется несколько способов получать новые векторы: 1) умножая вектор на постоянное число; 2) дифференцируя вектор по времени; 3) складывая два вектора или вычитая.

§ 6. Законы Ньютона в векторной записи

Чтобы записать законы Ньютона в векторной форме, мы должны поучиться еще кое-чему и определить вектор ускорения. Этот вектор равен производной по времени вектора скорости, причем легко показать, что его составляющие равны вторым производным x, y и z по t:

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right) = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}, \tag{11.11}$$

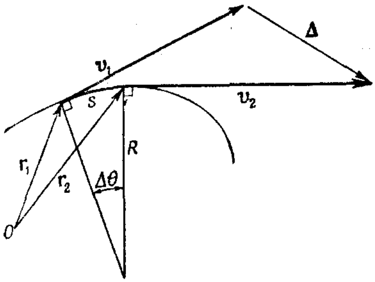
$$a_x = \frac{d^2x}{dt^2}, \qquad a_y = \frac{d^2y}{dt^2}, \qquad a_z = \frac{d^2z}{dt^2}. \tag{11.12}$$

После этого законы Ньютона можно записать таким образом:

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F}, \tag{11.13}$$

или

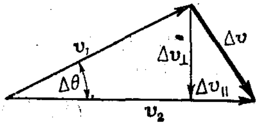
$$m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{F}. \tag{11.14}$$



Фиг. 11.7. Криволинейная траектория.

Теперь задача о доказательстве инвариантности законов Ньютона относительно вращений сводится к следующему: нужно доказать, что **a** (ускорение) есть вектор; это мы уже сделали. Затем нужно доказать, что **F** (сила) есть вектор; это мы *предполагаем*. Следовательно, если сила есть вектор, то уравнение (11.13) будет выглядеть одинаково во всех системах координат, ибо нам известно, что ускорение тоже вектор. Запись уравнений в виде, не содержащем явно x, y, z, привлекательна тем, что нам нет необходимости выписывать *три* уравнения каждый раз, когда мы хотим написать законы Ньютона или другие законы физики. Мы записываем то, что выглядит как *один* закон, хотя фактически, конечно, это три закона для каждой оси системы координат, потому что любое векторное уравнение содержит в себе утверждение, что *все составляющие равны*.

Тот факт, что ускорение — это скорость изменения вектора скорости, помогает найти ускорение в любых, казалось бы, трудных обстоятельствах. Предположим, например, что частица, двигаясь по какой-то сложной кривой (фиг. 11.7), имеет в момент t_1 скорость $\mathbf{v}_1$, а несколько позже, в момент t_2, скорость $\mathbf{v}_2$. Чему равно ускорение? *Ответ*: ускорение равно разности скоростей, деленной на малый промежуток времени; значит, нужно знать разность скоростей. Как же найти эту разность? Чтобы найти разность двух векторов, проведем вектор через концы векторов $\mathbf{v}_2$ и $\mathbf{v}_1$, иначе говоря, начертим вектор Δ в качестве разности этих двух векторов. Верно? *Нет*! Мы можем поступать так только тогда, когда *начала* векторов расположены в одной точке! Вычитать векторы, приложенные к разным точкам, бессмысленно. Остерегайтесь этого! Чтобы вычесть векторы, нужно начертить другую схему. На фиг. 11.8 векторы $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$ перенесены параллельно и равны их двойникам, изображенным на фиг. 11.7. Теперь можно поговорить об ускорении. Ускорение, конечно, просто равно $\Delta\mathbf{v}/\Delta t$. Интересно заметить,



Фиг. 11.8. Диаграмма для вычисления ускорения.

что разность скоростей можно разделить на две части: можно представить себе, что ускорение состоит из *двух составляющих*: $\Delta\mathbf{v}_{\parallel}$ — вектора, параллельного касательной к пути, и вектора $\Delta\mathbf{v}_{\perp}$, перпендикулярного к этой касательной. Эти векторы показаны на фиг. 11.8. Касательное к пути ускорение равно, естественно, лишь изменению *длины* вектора, т. е. изменению величины *скорости* v:

$$a_{\parallel}=\frac{dv}{dt}. \tag{11.15}$$

Другую, поперечную составляющую ускорения легко вычислить, взглянув на фиг. 11.7 и 11.8. За короткое время Δt изменение угла между $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$ равно малому углу $\Delta\theta$. Если величина скорости равна v, то

$$\Delta v_{\perp}=v\Delta\theta,$$

а ускорение a равно

$$a_{\perp}=v\frac{\Delta\theta}{\Delta t}.$$

Теперь нам нужно знать $\Delta\theta/\Delta t$. Эту величину можно найти так: если в данный момент кривую можно приблизительно заменить окружностью радиусом R, то, поскольку за время Δt частица пройдет расстояние $s=v\Delta t$, изменение угла равно

$$\Delta\theta=v\frac{\Delta t}{R}, \qquad \text{или} \qquad \frac{\Delta\theta}{\Delta t}=\frac{v}{R}.$$

Таким образом, как мы уже установили ранее,

$$a=\frac{v^2}{R}. \tag{11.16}$$

§ 7. *Скалярное произведение векторов*

Давайте еще немного займемся свойствами векторов. Легко понять, что *длина* шага в пространстве одинакова во всех координатных системах. Следовательно, если какому-то шагу $\mathbf{r}$ соответствуют составляющие x, y, z в одной системе координат и составляющие x', y', z' в другой системе, то расстояние $r=|\mathbf{r}|$ одно и то же в обеих системах. Сначала мы, конечно, должны ввести два расстояния

$$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

и

$$r'=\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2},$$

а затем проверить, что эти обе величины равны. Чтобы не возиться с квадратным корнем, будем сравнивать квадраты расстояний. Мы должны, таким образом, показать, что

$$x^2+y^2+z^2=x'^2+y'^2+z'^2. \tag{11.17}$$

Подставив в это уравнение определяемые соотношением (11.5) значения x', y', z', мы увидим, что это действительно так. Значит, кроме уже изученных нами векторных уравнений, существуют еще какие-то соотношения, верные в любой системе координат.

Незаметно мы получили новый тип величин. Мы можем построить функцию x, y и z, называемую *скалярной функцией*,— величину, которая не имеет направления, и одинакова в обеих системах координат. Из вектора можно построить скаляр. Хорошо бы найти общее правило для этого построения. Собственно говоря, мы уже нашли это правило: надо возвести в квадрат каждую из составляющих вектора и сложить их. Определим теперь новую величину, которую обозначим $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}$. Это не вектор, а скаляр; это число, одинаковое во всех координатных системах и определяемое как сумма квадратов трех составляющих вектора:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2. \tag{11.18}$$

Вы спросите: «В какой системе координат?» Но раз это число не зависит от системы координат, то ответ одинаков в *любой* системе координат. Мы имеем дело с новым *видом* величины, с *инвариантом*, или *скаляром*, полученным «возведением вектора в квадрат». Если теперь определить, исходя из векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, величину

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z, \tag{11.19}$$

то можно убедиться, что эта величина совпадает в штрихованной и нештрихованной системах координат. Чтобы доказать это, заметим, что это верно для величин $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}$, $\mathbf{b} \cdot \mathbf{b}$ и $\mathbf{c} \cdot \mathbf{c}$, где $\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$. Сумма квадратов $(a_x + b_x)^2 + (a_y + b_y)^2 + (a_z + b_z)^2$ — инвариант:

$$\begin{aligned}(a_x + b_x)^2 + (a_y + b_y)^2 + (a_z + b_z)^2 &= \\ = (a_{x'} + b_{x'})^2 + (a_{y'} + b_{y'})^2 + (a_{z'} + b_{z'})^2&. \end{aligned} \tag{11.20}$$

Раскроем скобки в обеих сторонах этого уравнения. Перекрестные произведения дадут нам выражения типа (11.19), а суммы квадратов составляющих $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ — выражения (11.18). Инвариантность слагаемых типа (11.18) приводит к инвариантности перекрестных произведений типа (11.19).

Величина $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ называется *скалярным произведением* двух векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ и имеет много интересных и полезных свойств. Например, легко доказать, что

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}. \tag{11.21}$$

Есть еще очень простой геометрический способ вычисления $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$, при котором не надо определять составляющих $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$; просто $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ есть произведение длин векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ на косинус угла между ними. Почему? Предположим, что мы выбрали такую систему координат, в которой вектор **a** направлен вдоль оси x; в этом случае вектор **a** имеет единственную ненулевую составляющую a_x, которая равна длине вектора **a**. Таким образом, уравнение (11.19) сводится в этом случае к $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=a_x b_x$, что равно произведению длины вектора **a** на составляющую вектора **b** по направлению **a**, которая в свою очередь равна $b\cos\theta$, т. е.

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=ab\cos\theta.$$

Таким образом, в этой частной системе координат мы доказали, что $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ равно произведению длин векторов **a** и **b** на косинус угла между ними θ. Но *если это верно в одной системе координат, то это верно и во всех системах*, потому что $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ не зависит от выбора системы координат.

Что хорошего может дать нам эта новая величина? Нужно ли физику скалярное произведение? Да, оно необходимо ему постоянно. Например, в гл. 4 мы назвали кинетической энергией величину $^1/_2 mv^2$, но если частица движется в пространстве, то нужно возвести в квадрат отдельно составляющие скорости x, y и z, так что формулу для кинетической энергии можно записать в виде

$$\text{к. э.}=\frac{1}{2}m(\mathbf{v}\cdot\mathbf{v})=\frac{1}{2}m(v_x^2+v_y^2+v_z^2). \qquad (11.22)$$

Энергия не имеет направления. Импульс же направление имеет, это — вектор, и он равен произведению массы на вектор скорости.

Другим примером скалярного произведения может служить работа, произведенная силой при перемещении какого-нибудь предмета с одного места на другое. Мы еще не дали определения работы, она равна изменению энергии, прибавке в весе, после того как сила **F** поработает вдоль пути **s**:

$$\text{Работа}=\mathbf{F}\cdot\mathbf{s}. \qquad (11.23)$$

Иногда целесообразно говорить о составляющей вдоль определенного направления (например, вдоль вертикали, потому что это направление силы тяжести). Для этого удобно ввести *единичный вектор* вдоль интересующего нас направления. Под единичным вектором мы будем понимать вектор, скалярное произведение которого на себя равно единице. Пусть это будет вектор **i**; тогда $\mathbf{i}\cdot\mathbf{i}=1$. Скалярное произведение $\mathbf{i}\cdot\mathbf{a}$ равно $a\cos\theta$, т. е. оно равно составляющей вектора **a** вдоль направления **i**. Это наилучший способ получить составляющую вектора. Поступая так, мы можем найти все составляющие вектора и получить забавную формулу.

Предположим, что нам задана какая-то система координат x, y и z. Введем три вектора: **i** — единичный вектор вдоль оси x,

$\mathbf{j}$ — единичный вектор вдоль оси y и $\mathbf{k}$ — единичный вектор вдоль оси z. Ясно, что $\mathbf{i}\cdot\mathbf{i}=1$. Чему же равно произведение $\mathbf{i}\cdot\mathbf{j}$? Если угол между векторами прямой, то их скалярное произведение равно нулю. Таким образом,

$$\begin{array}{lll} \mathbf{i}\cdot\mathbf{i}=1, & & \\ \mathbf{i}\cdot\mathbf{j}=0, & \mathbf{j}\cdot\mathbf{j}=1, & \\ \mathbf{i}\cdot\mathbf{k}=0, & \mathbf{j}\cdot\mathbf{k}=0, & \mathbf{k}\cdot\mathbf{k}=1. \end{array} \tag{11.24}$$

Используя эти свойства векторов $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$, можно записать любой вектор $\mathbf{a}$ в виде

$$\mathbf{a}=a_x\cdot\mathbf{i}+a_y\cdot\mathbf{j}+a_z\cdot\mathbf{k}. \tag{11.25}$$

Таким образом, можно от составляющих вектора легко перейти к самому вектору.

Мы изучили далеко не все свойства векторов. Однако, прежде чем углубиться в этот вопрос, научимся сперва применять обсужденные сейчас идеи в физике. И тогда, когда мы хорошо овладеем основным материалом, будет легче продвинуться дальше, не впадая в ошибки. Позднее мы увидим, что удобно определить еще одно произведение двух векторов, которое называется векторным произведением и записывается в виде $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$. Однако обсуждение этого вопроса лучше отложить до следующей главы.

Глава 12

ХАРАКТЕРИСТИКИ СИЛЫ

§ 1. *Что есть сила?*

Хотя изучение законов физики интересно и поучительно, хотя они и помогают нам понимать природу и овладевать ее силами, все же порой стоит остановиться и поразмыслить: что же они на самом деле значат? Смысл любого утверждения — вещь, которая издавна, с незапамятных времен, интересовала и тревожила философов, а уж смысл физических законов тем более должен волновать нас, ведь повсеместно считается, что в этих законах таятся некоторые реальные знания. Смысл истины — это глубочайший философский вопрос; всегда важно вовремя спросить: что это значит?

Спросим же: в чем смысл физических законов Ньютона, в чем смысл формулы $\mathbf{F}=m\mathbf{a}$? В чем смысл силы, массы и ускорения? Мы интуитивно понимаем, что такое масса; мы можем также *определить* ускорение, если нам понятно, что́ такое место и что́ такое время. Смысл этих понятий мы поэтому не будем обсуждать, а сосредоточимся на новом понятии *силы*. И здесь ответ тоже весьма прост: если тело ускоряется, значит на него действует сила. Так говорят законы Ньютона, и самое точное и красивое из мыслимых определений силы состояло бы в том, что сила есть масса тела, умноженная на его ускорение.

Имеется, положим, закон, что импульс сохраняется тогда, когда сумма внешних сил равна нулю. И вот у нас спрашивают: «А что это *значит*: сумма внешних сил равна нулю?» И мы любезно отвечаем: «Когда полный импульс постоянен, то сумма внешних сил равна нулю». Нет, здесь что-то не то. Ведь ничего нового мы при этом не сказали. Обнаружив основной закон, утверждающий, что сила есть масса на ускорение, а потом *определив* силы как произведение массы на ускорение, мы ничего нового не открываем. Можно также определить силу и на другой манер: движущееся тело, на которое сила не действует, продолжает двигаться по прямой с постоянной скоростью. Тогда, увидев, что тело *не* движется по прямой с постоянной скоростью, мы можем утверждать, что на него действует сила. Но такие высказывания не могут составить содержание физики: зачем же ей гонять определения по кругу? Несмотря на это, приведенное выше положение Ньютона, по-видимому, самое точное из всех определений силы, одно из тех, которые так много говорят сердцу математика. И все же оно совершенно бесполезно, потому что из одного определения никогда ничего никто не выводил. Можно день-деньской просиживать в кресле, определяя слова по своему хотению, но совсем иное дело — понять, что́ происходит при столкновении двух шаров или что́ бывает, когда груз висит на пружинке. *Поведение* тел и выбор определений — между этими вещами нет ничего общего.

Пусть, например, мы бы решились говорить, что тело, предоставленное самому себе, лежит на месте и не движется; тогда, заметив, что что-то движется, мы бы стали утверждать, будто на него действует «жила» — мера охоты к перемене мест. Мы получили бы прекрасный новый закон, все было бы хорошо, кроме тех случаев, когда действует «жила». Как видите, все было бы подобно нашему определению силы и точно так же не несло бы в себе никакой информации. Истинное же содержание законов Ньютона таково: предполагается, что сила обладает *независимыми свойствами* в дополнение к закону $\mathbf{F}=m\mathbf{a}$; но *характерные* независимые свойства сил не описал полностью ни Ньютон, ни кто-нибудь еще; поэтому физический закон $\mathbf{F}=m\mathbf{a}$ — закон неполный. Он подразумевает, что, изучив характеристики величины, определяемой как произведение m на $\mathbf{a}$, мы обнаружим в них некоторую простоту; закон этот дает нам хорошую программу анализа природы, он подсказывает нам, что свойства этой величины — силы — могут оказаться простыми, что ее стоит изучать.

Первый пример таких сил — полный закон тяготения, предложенный Ньютоном. Формулируя свой закон, он отвечал на вопрос: что такое сила? Если бы ничего, кроме тяготения, не существовало, то сочетание этого закона и закона силы (второго закона движения) оказалось бы завершенной теорией. Но, кроме тяготения, существует и многое другое, и мы собираемся пользоваться законами Ньютона во всевозможных положениях. Поэтому нам придется кое-что порассказать о свойствах сил.

К примеру, говоря о силе, мы всегда неявно предполагаем, что когда нет физических тел, то сила равна нулю. Если мы видим, что сила не равна нулю, мы ищем по соседству ее *источник*. Это предположение совсем не то, что введенная нами «жила».

Одна из важнейших характеристик силы — ее материальное происхождение; и это свойство как раз *нельзя считать* определением.

Ньютон привел еще одно правило, касающееся сил: силы между взаимодействующими телами равны и противоположны; действие равно противодействию. И это правило, оказывается, не совсем верно. Да и сам закон $F=ma$ не совсем верен; будь он определением, мы бы должны были утверждать, что он точно верен *всегда*; а на самом деле это не так.

Вы можете заявить: «А мне не нравится эта неточность, я хочу, чтобы все определялось точно, да и во многих книжках написано, что наука — вещь точная, что в ней *все* определено». Но сколько бы вы ни настаивали на точном определении силы, вы его никогда не получите! Во-первых, и сам Второй закон Ньютона не точен, а во-вторых, чтобы понять физические законы, вы должны усвоить себе раз и навсегда, что все они — в какой-то степени приближения.

Любое простое высказывание является приближенным; в виде примера рассмотрим некоторый предмет... кстати, *что такое* предмет? «Философы» всегда отвечают: «Ну, например, стул».

Стоит услышать это и сразу становится ясно, что они сами не понимают того, о чем говорят. *Что* есть стул? Стул имеет определенную массу... Определенную? Насколько определенную? Из него время от времени вылетают атомы — немного, но все же! На него садится пыль, из него сыплется труха, да и лак со временем сходит. Четко определить стул, сказать точно, какие атомы принадлежат ему, какие — воздуху, а какие — лаку, невозможно. Значит, массу стула можно определить лишь приближенно. Точно так же невозможно определить массу отдельного предмета, ибо таких предметов не существует, в мире нет одиноких, обособленных объектов; любая вещь есть смесь множества других, и мы всегда имеем дело с рядом приближений и идеализаций. Вся суть в идеализации. В очень хорошем приближении (около 1 к 10^{10}) количество атомов стула за минуту не меняется. Если вас эта точность устраивает, вы имеете право считать массу стула постоянной. Точно так же можно идеально изучить и характеристики силы, стоит только не гнаться за точностью. Вас может не удовлетворить этот приближенный взгляд на природу, который пытается выработать физика (все время стремясь повысить точность приближений), вы можете предпочесть математическое определение, но оно никогда не действует в реальном мире. Математические определения хороши для математики — там можно полностью и до конца следовать логике, а физический мир сложен. Мы об этом уже говорили, приводя такие примеры, как океанские волны и бокал вина. Пытаясь разделить их на части, мы толкуем отдельно о массе вина и отдельно о массе бокала. Но как можно узнать, где одно, где другое, раз одно растворимо в другом? И сила, действующая на обособленный предмет, уже включает неточность, и всякая система рассуждений о реальном мире, по крайней мере сегодня, предполагает разного рода приближения.

Эта система ничем не похожа на математические рассуждения. В них все может быть определено, и в итоге всегда *не известно*, о чем говорят.

Действительно, ведь все великолепие математики в том и состоит, что *в ней мы не знаем, о чем толкуем.* Ее законы, ее доказательства, ее логика не зависят от того, *чего* они касаются,— и в этом своя, особая красота. Когда вы имеете другую совокупность объектов, подчиняющихся той же системе аксиом, что и евклидова геометрия, то вы можете выдвинуть новые определения и делать выводы, сообразуясь с правильной логикой,— все следствия окажутся правильными, и совершенно неважно, чего они касаются. А в природе? Когда вы проводите линию или провешиваете ее при помощи луча света и теодолита (как это делается на геодезических съемках) — следует ли природа Евклиду? Нет, вы делаете приближение; крест на объективе имеет определенную толщину, а геометрическая линия — никакой; значит, применять ли в съемках евклидову геометрию или нет — это вопрос физики, а не математики.

Конечно, с экспериментальной (а не математической) точки зрения вам нужно знать, применимы ли законы Евклида к тому роду геометрии, которую вы используете, измеряя окрестности; вы предполагаете, что да, применимы. И, действительно, они прекрасно работают; прекрасно, но не точно, потому что ваши съемочные линии— это не настоящие геометрические линии. Приложимы или нет абстрактные евклидовы прямые к линиям, провешиваемым на опыте,— есть дело самого опыта; на этот вопрос чистым рассуждением не ответить.

Точно таким же образом вы не можете назвать $F=ma$ определением, вывести из него все чисто математически и сделать механику математической теорией: механика — это описание природы. Выдвигая подходящие постулаты, всегда можно создать математическую систему вроде евклидовой, но вы не можете создать математики мира; рано или поздно вам пришлось бы отвечать на вопрос: выполняются ли эти аксиомы на объектах природы? И вы немедленно завязли бы среди этих запутанных, «нечистых» реальных предметов,— правда, добиваясь все большей и большей точности приближений.

§ 2. Трение

Итак, чтобы по-настоящему понять законы Ньютона, мы должны обсудить свойства сил; цель этой главы— начать это обсуждение и составить своего рода дополнение к законам Ньютона. Мы уже знакомы со свойствами ускорения и с другими сходными представлениями, теперь же нам предстоит заняться свойствами сил. Из-за сложности их мы в этой главе (в отличие от прежних) не будем гнаться за точными формулировками. Чтобы начать с конкретной силы, рассмотрим сопротивление, которое воздух оказывает летящему самолету. Каков закон этой силы? (Мы *обязаны* найти его; ведь закон существует для каждой силы!) Едва ли только он будет прост. Стоит представить себе торможение воздухом самолета — свист ветра в крыльях, вихри, порывы, дрожание фюзеляжа и множество других сложностей,— чтобы понять, что этот закон вряд ли выйдет простым и удобным. Тем замечательней тот факт, что у силы очень простая закономерность: $F \approx cv^2$ (постоянная, умноженная на квадрат скорости).

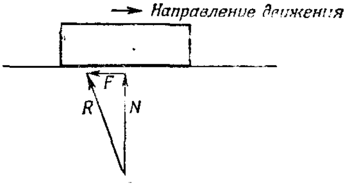
Каково же положение этого закона среди других? Подобен ли он закону $\mathbf{F}=m\mathbf{a}$? Отнюдь. Во-первых, он эмпирический, и получен он грубыми измерениями в аэродинамической трубе. Но вы возразите: «Что ж, закон $\mathbf{F}=m\mathbf{a}$ тоже мог бы быть эмпирическим». Но разве в этом дело? Различие не в эмпиричности, а в том, что, насколько мы понимаем, этот закон трения есть результат множества влияний и в основе своей ничуть не прост. Чем больше мы станем его изучать, чем точнее мерить, тем *сложней* (а не *проще*) представится он нам. Иными словами, все глубже вникая в закон торможения самолета, мы все ясней будем понимать его«фальшь». Чем глубже взгляд, чем аккуратней измерения, тем усложненней становится истина; она не предстанет перед нами как итог простых фундаментальных процессов (впрочем, мы и с самого начала об этом догадывались). На очень слабых скоростях (самолету, например, они даже недоступны) закон меняется: торможение уже зависит от скорости почти линейно. Или, к примеру, торможение шара (или пузырька воздуха или чего-нибудь еще) за счет трения о вязкую жидкость (наподобие меда),— оно тоже при малых скоростях пропорционально скорости, а на больших, когда образуются вихри (не в меде, конечно, а в воде или воздухе), опять возникает примерная пропорциональность квадрату скорости ($F=cv^2$); при дальнейшем росте скорости и это правило не годится. Можно, конечно, говорить: «Ну, здесь слегка меняется коэффициент». Но ведь это просто уловка.

Во-вторых, есть и другие сложности: можно ли, скажем, эту силу делить на части — на силу трения крыльев, фюзеляжа, хвоста и т. д.? Конечно, когда нужно бывает узнать вращательные моменты, действующие на части самолета, то так делать можно, но тогда уж надо иметь специальный закон трения для крыльев и т. д. И выясняется тот удивительный факт, что сила, действующая на крыло, зависит от другого крыла, т. е. если убрать самолет и оставить в воздухе одно крыло, то сила будет совсем не такой, какой она была бы, если бы в воздухе был весь самолет. Причина, конечно, в том, что ветер, бьющий в нос самолета, стекает на крылья и меняет силу торможения. И хотя кажется чудом, что существует такой простой, грубый эмпирический закон, пригодный для создания самолетов, но он не из тех законов физики, которые называют *основными*: по мере углубления он становится все сложней и сложней. Какое-нибудь изучение зависимости коэффициента c от формы носа самолета сразу разрушает его простоту. Никакой простой зависимости не остается. То ли дело — закон тяготения: он прост, и дальнейшее его углубление только подчеркивает это.

Мы только что говорили о двух типах трения, возникающих в результате быстрого движения в воздухе или медленного в меде. Но есть еще вид трения — сухое, или трение скольжения: о нем говорят тогда, когда одно твердое тело скользит по другому. Чтобы продолжать движение, такому телу нужна сила. Ее называют силой трения. Происхождение ее — вопрос очень запутанный. Обе соприкасающиеся поверхности неравномерны, если разглядывать их на атомном уровне. В точках соприкосновения атомы сцепляются; при нажиме на тело сцепка рвется и возникают колебания (во всяком случае, происходит нечто похожее). Прежде думали, что механизм трения несложен: поверхность покрыта неровностями и трение есть результат подъема скользящих частей на эти неровности; но это неправильно, ведь тогда бы не было потерь энергии, а на самом деле энергия на трение тратится. Механизм потерь иной: неровности при скольжении сминаются, возникают колебания и движение атомов, и тепло растекается по обоим телам. И здесь крайне неожиданным оказывается, что эмпирически это трение можно приближенно описать простым законом. Сила, нужная для того, чтобы преодолевать трение и тащить один предмет по поверхности другого, зависит от силы, направленной по нормали (по перпендикуляру) к поверхностям соприкосновения. В довольно хорошем приближении можно считать, что сила трения пропорциональна нормальной силе с более или менее постоянным коэффициентом:

$$F=\mu N, \tag{12.1}$$

где μ — *коэффициент трения* (фиг. 12.1). Хотя коэффициент μ не очень постоянен, эта формула оказывается хорошим эмпирическим правилом, позволяющим прикидывать, какая сила понадобится в тех или иных практических или инженерных обстоятельствах. Только когда нормальная сила или быстрота движе-



Фиг. 12.1. Соотношение между силой трения и нормальной составляющей силы при скольжении.

ния очень уж велика, закон отказывает: выделяется чересчур много тепла. Важно понимать, что у любого из этих эмпирических законов есть ограничения, вне которых они не работают.

Приближенную справедливость формулы $F=\mu N$ можно засвидетельствовать простым опытом. Положим брусок весом W на плоскость, наклоненную под углом θ. Подымем плоскость круче, пока брусок под тяжестью собственного веса не соскользнет с нее. Составляющая веса вниз вдоль плоскости $W \sin\theta$ равна силе трения F, раз брусок скользит равномерно. Слагающая веса, нормальная к плоскости, это $W\cos\theta$; она и есть нормальная сила N. Формула превращается в $W\sin\theta=\mu W\cos\theta$, откуда $\mu=\sin\theta/\cos\theta=\mathrm{tg}\theta$. Согласно этому закону, при определенном наклоне плоскости брусок начинает скользить. Если брусок нагрузить дополнительным весом, то все силы в формуле возрастут в той же пропорции, и W из формулы выпадет. Если величина μ не изменилась, то нагруженный брусок опять соскользнет при таком же наклоне. Определив из опыта угол θ, убедимся, что при большем весе бруска скольжение все равно начинается на том же угле наклона. Даже если вес возрос многократно, это правило соблюдается. Мы приходим к заключению, что от веса коэффициент трения не зависит.

Когда проделываешь этот опыт, легко заметить, что при правильном угле наклона θ брусок скользит не непрерывно, а с остановками: на одном месте он застрянет, а на другом рванется вперед. Такое поведение есть признак того, что коэффициент трения только грубо можно считать постоянным: он меняется от места к месту. Столь же неуверенное поведение наблюдается и при изменении нагрузки бруска. Различия в трении возникают от разной гладкости или твердости частей поверхности, от грязи, ржавчины и прочих посторонних влияний. Таблицы, в которых перечислены коэффициенты трения «стали по стали», «меди по меди» и прочее,— все это сплошное надувательство, ибо в них этими мелочами пренебрегают, а ведь они-то и определяют значение μ. Трение «меди о медь» и т. д.— это на самом деле трение «о загрязнения, приставшие к меди».

В опытах описанного типа трение от скорости почти не зависит. Многие верят, что трение, которое нужно преодолеть, чтобы привести предмет в движение (статическое), больше силы, необходимой для поддержания уже возникшего движения (трение скольжения). Но на сухих металлах трудно заметить какую-либо разницу. Мнение это порождено, вероятно, опытами, в которых присутствовали следы масла или смазки, а может быть, там бруски закреплялись пружинкой или чем-нибудь гибким, как бы привязываясь к опоре.

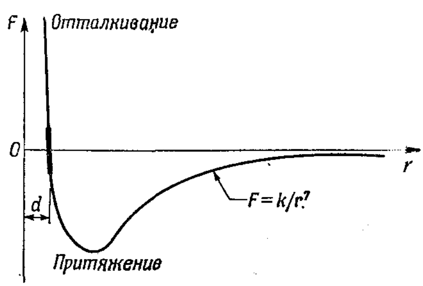
Очень трудно добиться точности в количественных опытах по трению, и до сей поры трение не очень хорошо проанализировано, несмотря на огромное значение такого анализа для техники. Хотя закон $F=\mu N$ для стандартных поверхностей почти точен, причину такого вида закона на самом деле не понимают. Чтобы показать, что μ мало зависит от скорости, нужны особо тонкие эксперименты, потому что от быстрых колебаний нижней поверхности видимое трение сильно падает. В опытах на больших скоростях надо заботиться, чтобы тела не дрожали, а то видимое трение сразу уменьшается. Во всяком случае, этот закон трения относится к тем полуопытным законам, которые поняты не до конца и не становятся понятней, несмотря на огромные усилия. Оценить коэффициент трения между двумя веществами сейчас практически никому не под силу.

Раньше было уже сказано, что попытки измерить μ при скольжении чистых веществ (медь по меди) ведут к сомнительным результатам, потому что соприкасающиеся поверхности — не чистая медь, а смеси окислов и прочих загрязнений. Если мы хотим получить совершенно чистую медь, если мы вычистим и отполируем поверхности, дегазируем вещество в вакууме и соблюдем все необходимые предосторожности, то все равно μ мы не получим. Потому что два куска меди слипнутся, и тогда хоть ставь плоскость торчком! Коэффициент μ, для умеренно жестких поверхностей обычно меньший единицы, тут вырастает до нескольких единиц! Причина такого неожиданного поведения вот в чем: когда соприкасаются атомы одного сорта, то они не могут «знать», что они принадлежат разным кускам меди. Будь там между ними другие атомы (атомы окислов, смазки, тонких поверхностных слоев загрязнений), тогда атомам меди было бы «ясно», находятся ли они на одном куске или на разных. Вспомните теперь, что именно из-за сил притяжения между атомами медь является твердым веществом, и вам станет понятно, почему невозможно правильно определить коэффициент трения для чистых металлов.

То же явление наблюдается в простом домашнем опыте со стеклянной пластинкой и бокалом. Поставьте бокал на пластинку, накиньте на него петлю и тяните; он неплохо скользит и коэффициент трения чувствуется; конечно, этот коэффициент слегка нерегулярен, но все же это коэффициент. Увлажните теперь пластинку и ножку бокала и потяните; вы почувствуете, что они слиплись. Внимательно вглядевшись, можно обнаружить даже царапины. Дело в том, что вода может удалять жир и прочие вещества, засоряющие поверхность; остается чистый контакт стекло — стекло. Этот контакт настолько хорош, что разорвать его не так-то просто: нарушить его трудней, чем вырвать кусочки стекла, вот и возникают царапины.

§ 3. *Молекулярные силы*

А теперь перейдем к характеристике молекулярных сил. Это силы, действующие между атомами; ими в конечном счете и вызывается трение. Классической физике так и не удалось удовлетворительно объяснить молекулярные силы. Чтобы их полностью понять, понадобилась квантовая механика. Эмпирически, однако, силу, действующую между двумя атомами, можно изобразить примерно так, как на фиг. 12.2, где эта сила F представлена как функция расстояния r между атомами. Бывают и другие случаи: в молекуле воды, например, отрицательные заряды размещены главным образом на атоме кислорода и центры положительных и отрицательных зарядов оказываются не в одной точке, поэтому соседние молекулы испытывают действие сравнительно больших сил. Называют эти силы *диполь-дипольными*. Но во многих системах заряды сбалансированы куда лучше, в частности в газообразном кислороде они почти симметричны. В этом случае, хоть минус- и плюс-заряды рассеяны по молекуле, распределение их таково, что центры минус- и плюс-зарядов совпадают. Молекулы, центры которых не совпадают, называются *полярными*; произведение заряда на промежуток между центрами называется *дипольным моментом*. У неполярных молекул центры зарядов совпадают. Для них для всех оказывается, что, хотя суммарный общий заряд равен нулю, сила на больших расстояниях ощущается как притяжение и изменяется обратно пропорционально седьмой степени удаления, т. е. $F=k/r^7$, где k — постоянная, зависящая от типа молекул. Почему это так, вы узнаете тогда, когда выучите квантовую механику. У диполей силы притяжения еще



Фиг. 12.2. Сила, действующая между двумя атомами, как функция расстояния между ними.

заметнее. И наоборот, если атомы или молекулы тесно сблизить, они очень сильно отталкиваются; именно по этой причине мы не проваливаемся на нижний этаж!

Эти молекулярные силы можно увидеть почти непосредственно и в опыте со скольжением бокала по стеклу, и в опыте с двумя тщательно отшлифованными и пригнанными плоскими поверхностями. Примером таких поверхностей могут служить плитки Иоганссона, которыми пользуются в машиностроении как стандартами для точных измерений длин. Если, прижав одну из плиток к другой, осторожно поднять верхнюю плитку, то нижняя тоже поднимется. Ее поднимут молекулярные силы, демонстрируя прямое притяжение атомов одной плитки к атомам другой.

И все же эти молекулярные силы притяжения не являются фундаментальными в том смысле, в каком фундаментально тяготение; они возникают в итоге неимоверно сложного взаимодействия всех электронов и ядер одной молекулы со всеми электронами и ядрами другой. Никакой простой формулы, которая бы учитывала все эти сложности, нельзя получить, так что это явление не фундаментальное.

Именно потому, что молекулярные силы притягивают на большом удалении и отталкивают на малом (см. фиг. 12.2), и существуют твердые тела; их атомы скреплены воедино взаимным притяжением, но держатся все же на расстоянии друг от друга (если их сблизить, сразу включается отталкивание). На том расстоянии d, где кривая на фиг. 12.2 пересекает ось r, сила равна нулю, т. е. наступает равновесие; на этом расстоянии и располагается молекула от молекулы. Если молекулы сблизить теснее, чем на расстояние d, то возникает отталкивание, изображенное частью кривой выше оси r. Но даже для ничтожного сближения требуются огромные силы, потому что кривая круто идет вверх на расстояниях, меньших d. А стоит чуть развести молекулы, как начинается слабое притяжение, возрастающее по мере удаления. Если же их резко потянуть, то они навсегда отделятся и связь разорвется.

Когда молекулы лишь *слегка* сводят или *слегка* разводят от положения равновесия d, то маленький участок кривой близ этого положения можно считать за прямую линию. Поэтому часто обнаруживается, что при небольших сдвигах *сила пропорциональна смещению*. Этот принцип известен как *закон Гука*, или *закон упругости*; он утверждает, что силы, стремящиеся после деформации тела вернуть его в начальное состояние, пропорциональны этой деформации. Закон, конечно, соблюдается лишь тогда, когда деформации малы; когда они велики, тело либо разорвется, либо сломается, смотря по характеру деформаций. Величина силы, до которой закон Гука еще действует, зависит от материала; скажем, у теста или замазки она очень мала, у стали — относительно велика. Закон Гука легко можно продемонстрировать на длинной стальной спиральной пружине, подвешенной вертикально. Грузик на нижнем конце пружины слегка раскручивает витки проволоки и тем самым немного оттягивает вниз каждый виток, приводя в общем на большом числе витков к заметному смещению. Если измерить общее удлинение пружины, скажем от гирьки весом 100 *г*, то окажется, что каждые добавочные 100 *г* груза вызовут примерно такое же удлинение, что и первые 100 *г*. Это постоянство отношения силы к смещению нарушается, когда пружина перегружена; тогда закон Гука больше не выполняется.

§ 4. Фундаментальные силы. Поля

Мы хотим побеседовать теперь об оставшихся фундаментальных силах. Называем мы их фундаментальными потому, что законы их действия фундаментально просты. Сперва рассмотрим электрическую силу.

Тела несут в себе электрические заряды, которые состоят просто из электронов и протонов. Если два тела заряжены, меж ними действует электрическая сила; если величины зарядов равны соответственно q_1 и q_2, то сила изменяется обратно пропорционально квадрату расстояния между зарядами

$$F=(\text{const})\cdot\frac{q_1 q_2}{r^2}.$$

Для разноименных зарядов этот закон похож на закон тяготения, но для *одноименных* сила становится отталкивающей и ее знак (направление) меняется. Сами заряды q_1 и q_2 могут быть и положительными и отрицательными; практически, пользуясь формулой, можно получить правильный знак силы, если поставить возле q их знаки. Сила направлена вдоль отрезка, соединяющего заряды. Коэффициент в формуле зависит, конечно, от выбора единиц силы, заряда и длины. Обычно заряд измеряют в *кулонах*, промежуток — в *метрах*, а силу — в *ньютонах*. Чтобы получить силу в ньютонах, константа (по историческим причинам ее пишут в виде $1/4\pi\varepsilon_0$) должна принимать численное значение

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}=8{,}99\cdot 10^9 \ \textit{ньютон}\cdot\textit{м}^2/\textit{кулон}^2, \tag{а}$$

т. е.

$$\varepsilon_0=8{,}854\cdot 10^{-12} \ \textit{кулон}^2/\textit{ньютон}\cdot\textit{м}^2. \tag{б}$$

Итак, закон силы для покоящихся зарядов имеет вид

$$\mathbf{F}=\frac{q_1 q_2 \mathbf{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}. \tag{12.2}$$

В природе самый важный из всех зарядов — это заряд отдельного электрона, он равен $1{,}60\cdot10^{-19}$ *кулон*. Кто работает не с большими зарядами, а с электрическими силами между фундаментальными частицами, те предпочитают как-то выделить сочетание $(q_{\text{эл}})^2/4\pi\varepsilon_0$, в котором $q_{\text{эл}}$ определяется как заряд электрона. Это сочетание часто встречается, и для упрощения расчетов его обозначают e^2; его численное значение в системе СИ оказывается равным $(1{,}52\cdot10^{-14})^2$. Удобство пользования константой в этой форме заключается в том, что сила в *ньютонах*, действующая между двумя электронами, запишется просто как e^2/r^2 (r дано в *метрах*), без каких-либо коэффициентов. На самом деле электрические силы намного сложней, чем следует из этой формулы, потому что формула относится к покоящимся телам. Сейчас мы рассмотрим более общий случай.

Анализ фундаментальных сил (не сил трения, а электрических сил или сил тяготения) связан с интересным и очень важным понятием.

Теория этих сил намного сложнее, чем об этом следует из закона обратных квадратов. Закон этот действует лишь тогда, когда взаимодействующие тела находятся в покое. Поэтому нужен усовершенствованный метод обращения с очень сложными силами — силами, которые возникают, когда тела начинают двигаться запутанным образом. Как оказалось, для анализа сил такого типа очень полезен подход, основанный на введении понятия «поля». Чтобы пояснить мысль на примере, скажем, электрической силы, положим, что в точке P находится заряд q_1, а в точке R—заряд q_2. Сила, действующая между зарядами, равна

$$\mathbf{F}=\frac{q_1q_2\mathbf{r}}{r^3}\,. \tag{12.3}$$

Чтобы проанализировать эту силу при помощи понятия поля, мы говорим, что заряд q_1 в точке P создает в точке R такие «условия», при которых заряд q_2, попадая в R, «ощущает» действие силы. Это один из мыслимых путей описания действия силы. Может быть, он выглядит странно: мы говорим, что действие силы $\mathbf{F}$ на заряд q_2 в точке R можно разбить на две части — на q_2 и $\mathbf{E}$, причем величина $\mathbf{E}$ существует в точке R безотносительно к тому, есть ли там заряд или нет (лишь бы все прочие заряды были на своих местах). Величина $\mathbf{E}$ есть «условие», созданное зарядом q_1, а $\mathbf{F}$ — ответ, отклик заряда q_2 на $\mathbf{E}$. Величину $\mathbf{E}$ называют *электрическим полем*. Это — вектор. Формула для электрического поля $\mathbf{E}$, созданного в точке R зарядом q_1, находящимся в точке P, такова: заряд q_1, умноженный на постоянную $1/4\pi\varepsilon_0$, деленный на r^2 (r — расстояние от P до R); поле действует по направлению радиус-вектора (вектор направления радиус-вектора — это радиус-вектор, деленный на свою длину). Таким образом, выражение для $\mathbf{E}$ таково:

$$\mathbf{E}=\frac{q_1\mathbf{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\,. \qquad (12.4)$$

А затем мы пишем

$$\mathbf{F}=q_2\mathbf{E}, \qquad (12.5)$$

т. е. связываем силу, поле и заряд в поле. В чем же суть всего этого? Суть в том, что анализ разделяется на две части. Одна часть говорит, что что-то *создает* поле, а другая — что оно *действует* на что-то. Позволяя нам рассматривать две части независимо, это разделение упрощает во многих случаях расчеты трудных задач. Когда зарядов много, то сперва мы рассчитываем суммарное электрическое поле, создаваемое этими зарядами в R, а потом, зная величину заряда, помещенного в R, находим силу, действующую на него.

Да и в случае тяготения мы можем сделать то же самое. Сила теперь $\mathbf{F}=-Gm_1m_2\mathbf{r}/r^3$. Анализ полностью совпадает: сила притяжения тела в поле тяготения равна произведению массы тела на поле $\mathbf{C}$. Сила, действующая на m_2, равна массе m_2, умноженной на поле $\mathbf{C}$, созданное массой m_1, т. е. $\mathbf{F}=m_2\mathbf{C}$. Значит, поле $\mathbf{C}$, создаваемое массой m_1, есть $\mathbf{C}=-Gm_1\mathbf{r}/r^3$; оно, как и электрическое поле, направлено по радиусу.

Такое разделение на две части не так уж тривиально, как могло бы показаться на первый взгляд. Оно было бы тривиальным, было бы просто иной записью того же самого, если бы законы действия сил были совсем просты, но они очень сложны, и оказывается, что поле настолько реально, что почти не зависит от объектов, создающих его. Можно колебать заряд, и влияние этого (поле) скажется на расстоянии. Если колебания прекратятся, в поле все равно будут ощущаться следы этих колебаний, потому что взаимодействие двух частиц не происходит мгновенно. Оттого и желательно уметь запоминать, что здесь раньше происходило. Если сила действия на заряд зависит от того, где другой заряд был вчера и каким он тогда был, то должна быть возможность проследить за тем, что было вчера; в этом и состоит сущность поля. Чем сложнее силы, тем реальней поле, и наша техника разделения становится все менее и менее искусственной.

Желая анализировать силы при помощи полей, мы нуждаемся в законах двоякого рода. Первые—это отклик на поле. Они дают нам уравнения движения. Например, закон отклика массы на поле тяжести состоит в том, что сила равна массе, умноженной на поле тяжести, или если тело еще и заряжено, то отклик заряда на электрическое поле равен заряду, умноженному на электрическое поле. Вторая часть анализа природы в таких положениях — это формулировка законов, определяющих напряженность поля и способ его возникновения. Эти законы иногда называют *уравнениями поля.* В нужный момент мы с ними познакомимся, а пока скажем о них лишь несколько слов.

Вот вам для начала самое замечательное свойство поля, оно абсолютно точно и легко усваивается. Общее электрическое поле, создаваемое группой источников, есть векторная сумма полей, создаваемых по отдельности первым, вторым и т. д. источниками. Иными словами, когда поле создано множеством зарядов и если отдельное поле первого есть $\mathbf{E}_1$, а второго — $\mathbf{E}_2$ и т. д., то мы должны просто сложить эти векторы, чтобы получить общее поле. Принцип этот выражается в виде

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 + \mathbf{E}_3 + \ldots \tag{12.6}$$

или, в согласии с определением поля,

$$\mathbf{E} = \sum_i \frac{q_i \mathbf{r}_i}{4\pi\varepsilon_0 r_i^3}. \tag{12.7}$$

Можно ли эти методы применить к тяготению? Силу притяжения двух масс m_1 и m_2 Ньютон выразил в виде $\mathbf{F} = -Gm_1m_2\mathbf{r}/r^3$. Но в соответствии с понятием поля можно сказать, что m_1 создает поле $\mathbf{C}$ во всем окружающем пространстве и сила, притягивающая m_2, равна

$$\mathbf{F} = m_2\mathbf{C}. \tag{12.8}$$

По аналогии с электричеством

$$\mathbf{C}_i = -\frac{Gm_i\mathbf{r}_i}{r_i^3}, \tag{12.9}$$

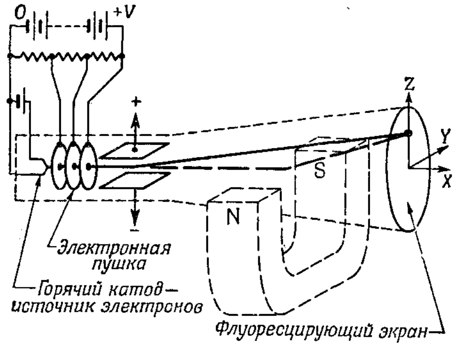
и тогда поле тяжести нескольких масс равно

$$\mathbf{C} = \mathbf{C}_1 + \mathbf{C}_2 + \mathbf{C}_3 + \ldots . \tag{12.10}$$

В гл. 7, где рассматривалось движение планет, мы по существу использовали именно этот принцип. Мы складывали все векторы сил, чтобы обнаружить общую силу, действующую на планету. Разделив на ее массу, мы и получим (12.10).

Уравнения (12.6) и (12.10) выражают так называемый *принцип суперпозиции*, или *наложения* полей. Этот принцип провозглашает, что общее поле нескольких источников есть сумма полей, создаваемых каждым из них. Насколько нам ныне известно, закон этот в электричестве наверняка выполняется даже тогда, когда заряды движутся и закон сил усложняется. Бывают иногда кажущиеся нарушения, но внимательный анализ всегда доказывает, что просто забыли какой-нибудь из движущихся зарядов. Но в отличие от электрических зарядов для сильных полей тяжести он не совсем точен. В теории

Фиг. 12.3. Электронная трубка.



тяготения Эйнштейна доказывается, что уравнение Ньютона (12.10) соблюдается лишь приближенно.

С электричеством тесно связана сила другого рода, называемая магнитной; ее тоже можно анализировать через понятие поля. Некоторые из качественных связей между этими силами видны в опыте с электронной трубкой (фиг. 12.3). На одном конце трубки помещен источник, испускающий поток электронов, а внутри имеется устройство, разгоняющее электроны до большой скорости и посылающее часть их на светящийся экран на другом конце трубки. Световое пятно в центре экрана, в месте ударов электронов, позволяет проследить за их путем. На пути к экрану пучок проходит сквозь узкую щель между параллельными металлическими пластинами, расположенными, допустим, плашмя. К пластинам подведено напряжение, позволяющее любую из них заряжать отрицательно. Напряжение создает между пластинами электрическое поле.

В первой части опыта отрицательное напряжение подается на нижнюю пластину, т. е. на ней образуется избыток электронов. Одноименные заряды отталкиваются, и поэтому светящееся пятно на экране взлетает внезапно вверх. (Можно сказать и иначе: электроны «чувствуют» поле и отвечают отклонением вверх.) Затем переключим напряжение и зарядим отрицательно уже верхнюю пластину. Световое пятно на экране опустится вниз, показывая, что электроны пучка отталкиваются электронами верхней пластины. (Иначе говоря, электроны «ответили» на изменение направления поля.)

Во второй части опыта напряжение на пластины уже не подается, а вместо этого проверяется влияние магнитного поля на электронный пучок. Для этого необходим подковообразный магнит, достаточно широкий, чтобы «оседлать» практически всю трубку. Предположим, что мы подвели магнит снизу к трубке, обхватили им ее и направили полюсы кверху (в виде буквы U). Мы замечаем, что пятно на экране смещается, скажем, кверху, когда магнит приближается снизу. Выходит, что магнит отталкивает пучок. Но не так все просто: если мы перевернем магнит, не переставляя его сторон, и приблизим его к трубке сверху, то пятно снова сдвинется *вверх*, т. е. вместо отталкивания наступило притяжение. А теперь вернем магнит в первоначальное положение, когда он обхватывал трубку снизу. Да, пятно по-прежнему отклоняется кверху; но повернем магнит на 180° вокруг вертикальной оси, чтобы он имел вид буквы U, но уже с переставленными полюсами. Смотрите-ка, пятно прыгает вниз и остается там, даже если мы переворачиваем теперь U вверх ногами.

Чтобы понять такое своеобразное поведение, нужно придумать какую-то иную комбинацию сил. Объясняется все это вот как. Вдоль магнита, от полюса к полюсу, тянется *магнитное поле*. Оно направлено всегда от одного определенного полюса (который можно снабдить какой-нибудь меткой) к другому. Вращение магнита вокруг его оси не меняет направления поля, а перестановка полюсов местами меняет. Например, если электроны летят горизонтально по оси x, а магнитное поле тоже горизонтально, но направлено по оси y, то магнитная сила, действующая на *движущийся электрон*, направлена по оси z (вверх или вниз, это уже зависит от того, как направлено поле — по оси y или против нее).

Мы пока не дадим полного закона сил взаимодействия зарядов, движущихся друг относительно друга в произвольных направлениях, потому что он чересчур сложен, но зато приведем формулы для случая, *когда поля известны*. Действие силы на заряженный предмет зависит от его движения; когда предмет неподвижен, сила, действующая на него, считается пропорциональной заряду с коэффициентом, называемым *электрическим полем*. Когда тело движется, сила изменяется, и поправка, новый «кусок» силы, оказывается линейно *зависящей от скорости* и направленной *поперек* скорости **v** и поперек другой векторной величины — *магнитной индукции* **B**. Когда составляющие электрического поля **E** и магнитной индукции **B** суть соответственно (E_x, E_y, E_z,) и (B_x, B_y, B_z), а составляющие скорости **v** суть (v_x, v_y, v_z), то составляющие суммарной электрической и магнитной сил, действующих на движущийся заряд q, таковы:

$$\begin{aligned} F_x &= q\,(E_x + v_y B_z - v_z B_y),\\ F_y &= q\,(E_y + v_z B_x - v_x B_z),\\ F_z &= q\,(E_z + v_x B_y - v_y B_x). \end{aligned} \qquad (12.11)$$

Если случайно магнитное поле имеет только компоненту B_y, а скорость — только v_x, то у магнитной силы остается составляющая вдоль z, поперек B и y.

§ 5. Псевдосилы

Очередной тип сил, который нам предстоит рассмотреть,— это псевдосилы.

В гл. 11 мы обсудили взаимоотношение двух молодых людей, Джо и Мика, обладателей различных систем координат. Пусть положение частицы по измерениям Мика есть x, а Джо дает для нее x'; тогда связь между ними такова:

$$x=x'+s, \qquad y=y', \qquad z=z',$$

где s показывает, насколько сместилась система Джо относительно системы Мика. Пусть у Мика в системе выполняются законы движения. Как они выглядят для Джо? Сперва мы обнаружим, что

$$\frac{dx}{dt}=\frac{dx'}{dt}+\frac{ds}{dt}.$$

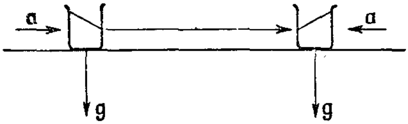
Раньше мы считали s постоянной и убедились, что законы движения при этом не меняются, так как $ds/dt=0$; в конечном счете в обеих системах все законы физики одинаковы. Но пусть $s=ut$, где u — постоянная скорость движения по прямой. Тогда s непостоянна и ds/dt — не нуль, а u, т. е. константа. Но ускорение d^2x/dt^2 такое же, как d^2x'/dt^2, потому что $du/dt=0$. Этим доказывается закон, использованный в гл. 10, а именно: когда мы движемся по прямой с постоянной скоростью, все законы физики выглядят так, как если бы мы стояли. Это преобразование Галилея. А теперь мы хотим рассмотреть случай поинтереснее, когда s зависит от времени еще сложнее, например $s=at^2/2$. Тогда $ds/dt=at$, а $d^2s/dt^2=a$, т. е. ускорение постоянно; можно рассмотреть также случай, когда ускорение само оказывается функцией времени. Это значит, что хотя закон силы с точки зрения Джо выглядит как

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=F_x,$$

но закон силы, по мнению Мика, иной:

$$m\frac{d^2x'}{dt^2}=F_{x'}-ma.$$

Иначе говоря, поскольку система координат Мика ускоряется по отношению к системе Джо, появляется добавочный член ma. Чтобы работать с законами Ньютона, Мик обязан подправить силы, ввести в них этот член. Другими словами, появляется кажущаяся, мистическая, новая сила неведомого происхождения; она возникает, конечно, из-за того, что у Мика координатная система неправильна. Это — пример псевдосилы; с другими



Фиг. 12.4. Иллюстрация к псевдосилам

примерами можно встретиться, если система координат *вращается.*

Примером псевдо- (как бы-, вроде-) силы является хорошо известная «центробежная сила». Наблюдатель во вращающейся системе координат (во вращающемся ящике) обнаружит таинственные силы, не вызываемые ни одним из известных источников сил; они отбрасывают предметы к стенке ящика. А объясняются они просто тем, что у наблюдателя нет ньютоновой системы координат — простейшей из всех.

Псевдосилы обнаруживаются на любопытном опыте, состоящем в том, что мы толкаем с ускорением кувшин с водой по столу. Тяжесть действует на воду вниз, но из-за горизонтального ускорения есть еще и псевдосила в горизонтальном направлении, назад по отношению к ускорению. Сумма силы тяжести и псевдосилы образует угол с вертикалью, во время ускорения поверхность воды перпендикулярна к этой сумме сил, т. е. наклонена под углом к столу, и вода приподнята к задней стенке кувшина. Когда мы перестаем толкать кувшин, когда он замедляется вследствие трения, псевдосила меняет свое направление и вода приливает к передней стенке кувшина (фиг. 12.4).

Очень важным свойством псевдосил следует считать то, что они всегда пропорциональны массам; то же справедливо и для тяжести. Существует поэтому возможность, что *тяжесть — это тоже псевдосила.* Не может ли статься, что тяготение вызывается отсутствием правильной системы координат? Ведь мы всегда можем получить силу, пропорциональную массе, стоит только представить, что тело ускоряется. Например, человек, помещенный в ящик, который стоит на земле, обнаруживает, что его что-то прижимает к полу с силой, пропорциональной его массе. Если бы земли не было вовсе, а ящик все еще покоился, то человек плавал бы в пространстве. С другой стороны, *если бы опять не было земли, а ящик кто-то тащил бы вверх* с ускорением g, то человек в ящике, анализируя физику этого явления, обнаружил бы псевдосилу, прижимающую его к полу точно так же, как это делает тяжесть.

Эйнштейн выдвинул знаменитую гипотезу, что ускорение вызывает имитацию (подобие) тяготения, что силы ускорения (псевдосилы) *нельзя отличить* от сил тяготения; нельзя сказать, какая часть данной силы — тяжесть, а какая — псевдосила.

Казалось бы, ничто не мешает считать тяжесть псевдосилой, говорить, что нас прижимает вниз оттого, что нас ускоряет вверх; но как быть с жителями Новой Зеландии, на другой стороне Земли — их-то куда ускоряет? Эйнштейн понял, что тяготение можно считать псевдосилой одновременно только в одной точке; его рассуждения привели к предположению, что *геометрия мира* сложнее обычной геометрии Евклида. Наше обсуждение вопроса чисто качественное и не претендует ни на что, кроме общей идеи.

Чтобы пояснить в общих чертах, как тяготение может быть результатом действия псевдосил, мы приведем чисто геометрический пример, ничего общего не имеющий с истинным положением вещей. Предположим, что мы с вами обитаем в двумерном мире и ничего о третьем измерении не знаем. Мы бы считали, что живем на плоскости, а на самом деле, предположим, жили бы на шаре; пускай теперь мы бросили предмет вдоль нашей поверхности, не действуя больше на него никакими силами. Как бы он двигался? Нам казалось бы, что он движется по прямой линии, но поскольку третьего измерения нет и он должен был бы оставаться на поверхности шара, то он двигался бы по кратчайшему расстоянию на сфере, т. е. по окружности большого круга. Бросим точно так же другой предмет, но в ином направлении; он направится тоже по дуге большого круга. Мы думаем, что находимся на плоскости, и надеемся поэтому, что расстояние между двумя предметами будет расти линейно с течением времени. Но тщательные наблюдения вдруг обнаружат, что на достаточно большом расстоянии предметы снова начнут сближаться, как если бы они притягивали друг друга. Но они *не* притягиваются один к другому; все дело в геометрии, это с нею происходит что-то «чуднóе». Хотя эта картинка и не касается геометрии Евклида (не показывает нам, что в ней есть «чуднóго»), но она показывает, что, заметно исказив геометрию, можно все тяготение отнести за счет псевдосилы. В этом и состоит общая идея теории тяготения Эйнштейна.

§ 6. *Ядерные силы*

Мы заключим эту главу кратким обзором единственных ныне известных сил, отличающихся от перечисленных,— *ядерных сил*. Эти силы действуют внутри ядра атома, и, хотя их много изучали, никто ни разу еще не смог рассчитать силу, действующую между двумя ядрами; и фактически закон ядерных сил сейчас не известен. Эти силы имеют крайне незначительную протяженность действия — они действуют только на размерах ядра около 10^{-13} *см*. Поскольку частицы столь малы, а расстояния так коротки, нам нечего надеяться на законы Ньютона — здесь действуют только законы квантовой механики. Анализируя ядра, мы больше не говорим о силах; мы заменяем понятие силы понятием энергии взаимодействия двух частиц (позже об этом будет сказано подробнее). Любые формулы, которые можно написать для ядерных сил, представляют довольно грубые приближения, в которых опущены многие детали взаимодействия; выглядят они примерно так: силы внутри ядер убывают не обратно квадрату расстояния, а отмирают экспоненциально за некоторым расстоянием r_0 (порядка 10^{-13} *см*) как $F=(1/r^2)\exp(-r/r_0)$. Иначе говоря, чуть частицы удалятся, как силы тут же исчезают, хотя ближе 10^{-13} *см* они очень велики. По-видимому, законы ядерных сил сложны до чрезвычайности; мы их не понимаем, и вся задача анализа фундаментального механизма, стоящего за ними, не решена. Попытки решить эту задачу привели к открытию множества необычных частиц, например π-мезонов, но происхождение сил все равно остается темным.

Глава 13

РАБОТА И ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ЭНЕРГИЯ (I)

§ 1. Работа падающего тела

В гл. 4 мы разобрали вопрос о сохранении энергии. При этом законами Ньютона мы не пользовались. Интересно теперь посмотреть, как возникает сохранение энергии из-за того, что действуют эти законы. Для ясности мы начнем с самых простых примеров и постепенно будем их усложнять.

Простейший пример сохранения энергии — это тело, падающее вниз, т. е. тело, движущееся только в вертикальном направлении. Если оно меняет свою высоту под влиянием только тяжести, то из-за движения оно обладает кинетической энергией T (или к. э.) Кроме того, у него есть потенциальная энергия mgh (сокращенно U, или п. э.). Их сумма постоянна:

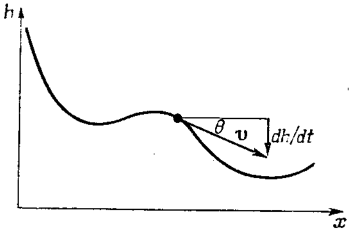
$$\underset{\text{к.э.}}{\frac{1}{2}mv^2} + \underset{\text{п.э.}}{mgh} = \text{const},$$

или

$$T + U = \text{const}. \tag{13.1}$$

Мы хотим показать, что это утверждение правильно. Что значит доказать его правильность? Второй закон Ньютона говорит, как движется тело, как со временем изменяется его скорость (а именно, что в падении она растет пропорционально времени, а высота падения меняется как квадрат времени). Если поэтому отмерять высоту от нулевой точки (где тело покоилось), то не будет ничего странного в том, что она окажется равной квадрату скорости, умноженному на какие-то постоянные. Однако все же рассмотрим это повнимательней.

Попробуем вычислить *прямо* из второго закона Ньютона, как обязана меняться кинетическая энергия; мы продифференцируем



Фиг. 13.1. Тело, движущееся под действием тяжести по кривой без трения.

кинетическую энергию по времени и потом применим закон Ньютона. Дифференцируя $^1/_2\ mv^2$ по времени, получаем

$$\frac{dT}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right)=\frac{1}{2}m2v\frac{dv}{dt}=mv\frac{dv}{dt}, \tag{13.2}$$

потому что m считается постоянной. Но по второму закону Ньютона $m(dv/dt)=F$, так что

$$\frac{dT}{dt}=Fv. \tag{13.3}$$

В общем случае получается $\mathbf{F}\cdot\mathbf{v}$, но для нашего одномерного случая лучше оставить просто произведение силы на скорость.

Сила в нашем простом примере постоянна, равна $-mg$ и направлена вниз (знак минус именно это и показывает), а скорость есть степень изменения положения по вертикали (высоты h) со временем. Поэтому степень изменения кинетической энергии равна $-mg(dh/dt)$. Взгляните: что за чудо! Перед нами снова чья-то скорость изменения — скорость изменения со временем величины mgh! Поэтому выходит, что с течением времени изменения в кинетической энергии и в величине mgh остаются равными и противоположными, так что их сумма остается неизменной. Что и требовалось доказать.

Мы только что показали, пользуясь Вторым законом Ньютона, что для постоянных сил энергия сохраняется, если только прибавлять потенциальную энергию mgh к кинетической $^1/_2\ mv^2$. Исследуем этот вопрос дальше; посмотрим, можно ли его обобщить, можно ли еще продвинуться в его понимании. Действует ли этот закон только для свободно падающих тел или является более общим? Из того, что мы знаем о сохранении энергии, можно ожидать, что он будет верен для тела, движущегося из одной точки в другую по кривой без трения и под действием одной лишь тяжести (фиг. 13.1). Когда тело, начав двигаться с высоты H, достигает высоты h, то опять должна быть верной та же формула, хотя бы скорость уже не была направлена по вертикали. Нам надо понять, *почему* она все еще правильна. Проведем тот же анализ; отыщем скорость изменения кинетической энергии во времени. Опять будет получаться $mv(dv/dt)$ — скорость изменения величины импульса, т. е. *сила в направлении* *движения* — касательная сила F_t. Итак,

$$\frac{dT}{dt} = mv\frac{dv}{dt} = F_t v.$$

Скорость — это скорость изменения расстояния вдоль кривой ds/dt, а касательная сила F_t теперь оказывается меньше mg в отношении, равном отношению расстояния ds вдоль пути к вертикальному расстоянию dh. Иными словами,

$$F_t = -mg\sin\theta = -mg\frac{dh}{ds},$$

так что

$$F_t\frac{ds}{dt} = -mg\left(\frac{dh}{ds}\right)\left(\frac{ds}{dt}\right) = -mg\frac{dh}{dt}$$

(ds выпадает). И опять, как прежде, мы получили величину $-mg(dh/dt)$, равную скорости изменения mgh.

Чтобы точно уяснить себе, как вообще соблюдается сохранение энергии в механике, рассмотрим сейчас некоторые полезные понятия.

Во-первых, рассмотрим скорость изменения кинетической энергии в общем трехмерном случае. Кинетическая энергия, когда движение имеет три измерения, равна

$$T = \frac{1}{2}m\left(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2\right).$$

Дифференцируя ее по времени, получаем три устрашающих члена:

$$\frac{dT}{dt} = m\left(v_x\frac{dv_x}{dt} + v_y\frac{dv_y}{dt} + v_z\frac{dv_z}{dt}\right). \qquad (13.4)$$

Но ведь $m(dv_x/dt)$ — это сила F_x, действующая на тело в направлении x. Значит, в правой части формулы (13.4) стоит $F_x v_x + F_y v_y + F_z v_z$. Призвав на помощь векторный анализ, вспоминаем, что это $\mathbf{F}\cdot\mathbf{v}$. Итак,

$$\frac{dT}{dt} = \mathbf{F}\cdot\mathbf{v}. \qquad (13.5)$$

А можно это вывести и быстрей: если $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ — два вектора, зависящих от времени, то производная от $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ равна

$$\frac{d(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})}{dt} = \mathbf{a}\cdot\frac{d\mathbf{b}}{dt} + \left(\frac{d\mathbf{a}}{dt}\right)\cdot\mathbf{b}. \qquad (13.6)$$

Подставим сюда $\mathbf{a} = \mathbf{b} = \mathbf{v}$:

$$\frac{d\left({}^1/_2 mv^2\right)}{dt} = \frac{d\left({}^1/_2 m\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}\right)}{dt} = m\frac{d\mathbf{v}}{dt}\cdot\mathbf{v} = \mathbf{F}\cdot\mathbf{v} = \mathbf{F}\cdot\frac{d\mathbf{s}}{dt}. \qquad (13.7)$$

Так как понятие кинетической энергии и вообще энергии очень важно, то различным величинам в этих уравнениях присвоены разные имена: ${}^1/_2 mv^2$ называется, как известно, *кинетической энергией*; $\mathbf{F}\cdot\mathbf{v}$ называется *мощностью*: сила, действующая на тело, умноженная («скалярно») на скорость тела,— это мощность, сообщаемая телу этой силой. Получается великолепная теорема: *скорость изменения кинетической энергии тела равна мощности, затраченной силами, действующими на тело.*

Но для изучения сохранения энергии анализ следует продолжить. Давайте оценим изменение кинетической энергии за очень короткое время dt. Умножив обе части уравнения (13.7) на dt, найдем, что изменение кинетической энергии равно силе, скалярно умноженной на дифференциал пройденного расстояния

$$dT = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}. \tag{13.8}$$

А интегрируя, получаем

$$\Delta T = \int_1^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}. \tag{13.9}$$

Что это значит? Это значит, что, как бы и по какой бы кривой траектории ни двигалось тело под действием силы, все равно изменение в к. э. при переходе от одной точки кривой к другой равно интегралу от компоненты силы вдоль кривой, умноженной на дифференциал смещения $d\mathbf{s}$ (интегрирование от первой точки до второй). И у этого интеграла есть имя: его называют *работой, совершенной силой над телом.* Немедленно мы обнаруживаем, что *мощность — это работа за секунду.* И еще мы замечаем, что работу производит только составляющая силы *вдоль направления движения.* В нашем первом простом примере участвовали только вертикальные силы с одной-единственной составляющей F_z, равной $-mg$. В этих обстоятельствах совершенно неважно, как тело движется, прямо вниз или по параболе, все равно от $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$ (которое можно написать как $F_x dx + F_y dy + F_z dz$) остается только $F_z dz = -mg dz$, потому что прочие составляющие силы — нули. Значит, в этом случае

$$\int_1^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_{z_1}^{z_2} -mg\,dz = -mg(z_2 - z_1), \tag{13.10}$$

так что в потенциальную энергию входит только *высота*, с которой тело падает.

Несколько слов о единицах. Так как сила измеряется в ньютонах, а для получения работы ее умножают на расстояние, то работу измеряют в единицах *ньютон·метр*, но большинство людей этого названия не любит, предпочитая название *джоуль* (*дж*). Это только другое слово, а единица та же. Итак, работу измеряют в джоулях. Мощность же — в джоулях в секунду; эту единицу называют *ватт* (*вт*). Если умножить ватты на время, то получим произведенную работу. Работу, которую местная энергосистема производит в наших квартирах (в техническом смысле), оценивается в ваттах, умноженных на время. Например, киловатт-час — это 1000 *вт* × 3600 *сек*, т. е. $3{,}6 \cdot 10^6$ *дж.*

Приведем еще несколько примеров работы и сохранения энергии. Рассмотрим тело, которое вначале имеет кинетическую энергию и быстро двигается, скользя по полу с трением. Оно останавливается. В начале кинетическая энергия *не равна* нулю, а в конце она *равна нулю*; существует работа, произведенная силами, потому что раз есть трение, то есть и составляющая силы в направлении, противоположном направлению движения, и энергия постепенно теряется. Теперь рассмотрим массу на конце маятника, который качается в вертикальной плоскости в поле тяжести без трения. Здесь наблюдается нечто другое, потому что, когда масса опускается, сила направлена тоже вниз, а когда подымается, сила направлена в обратную сторону, так что у $\mathbf{F}\cdot d\mathbf{s}$ на спуске и на подъеме разные знаки. В соответствующих точках спуска и подъема значения $\mathbf{F}\cdot d\mathbf{s}$ равны по величине, но противоположны по знаку, так что в итоге интеграл есть чистый нуль. Поэтому кинетическая энергия в конце спуска в точности такая же, какой она была в начале подъема; это и есть принцип сохранения энергии. (Заметьте, что в присутствии сил трения сохранение энергии на первый взгляд не выполняется. Значит, нужно искать другую *форму* энергии. И действительно, оказывается, что когда два тела трутся друг о друга, то возникает тепло, мы же сейчас делаем вид, что об этом не знаем.)

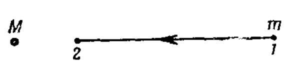
§ 2. *Работа, выполняемая тяжестью*

Теперь займемся задачей потруднее, когда силы уже не постоянны и не направлены вниз, как раньше. Мы рассмотрим, например, движение планеты вокруг Солнца или спутника вокруг Земли.

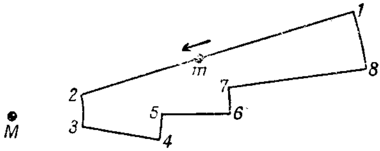
Сперва мы рассмотрим движение тела, которое падает из точки *1 прямо* на Солнце или на Землю (фиг. 13.2). Будет ли в этих обстоятельствах сохраняться энергия? Единственное отличие от того, что было раньше, — что теперь сила не постоянна, она *меняется* по мере падения. Мы знаем, что сила равна произведению GM/r^2 на массу m падающего тела. Конечно, и теперь кинетическая энергия при падении возрастает, как возрастала и тогда, когда нас еще не волновало изменение силы с высотой. Вопрос только в том, можно ли отыскать иную, отличную от mgh, формулу для потенциальной энергии, найти другую функцию расстояния от Земли, чтобы для нее сохранение энергии не нарушалось.

Этот одномерный случай рассматривать легко, потому что мы знаем, что изменение кинетической энергии равно интегралу

Фиг. 13.2. Падение малой массы m под действием тяжести на большую массу M.



Фиг. 13.3. Замкнутый путь обхода в поле тяготения.



от начала движения до конца от силы $-GMm/r^2$ по перемещению dr

$$T_2 - T_1 = -\int_1^2 GMm \frac{dr}{r^2}. \qquad (13.11)$$

В формуле нет никакого косинуса, потому что сила и перемещение направлены одинаково. Интегрировать dr/r^2 легко; получается $(-1/r)$, так что

$$T_2 - T_1 = +GMm\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right). \qquad (13.12)$$

Перед нами другая формула для потенциальной энергии. Уравнение (13.12) говорит нам, что величина $^1/_2\, mv^2 - GMm/r$, вычисленная в точке *1*, в точке *2* или в любой другой, остается постоянной.

У нас теперь есть формула для потенциальной энергии в поле тяготения для вертикального движения. Здесь возникает интересный вопрос: можно ли добиться *вечного движения* в поле тяготения? Поле-то меняется, в разных местах у него разная напряженность и разное направление. Нельзя ли взять бесконечную ленту без трения и запустить ее, скажем, так: пусть она сперва поднимает тело из одной точки в другую, потом проводит его по дуге окружности в третью точку, опускает на некоторый уровень, сдвигает по наклонному направлению и выводит на новый путь и т. п., так что по возвращении в начальную точку оказывается, что поле тяготения совершило некоторую работу и кинетическая энергия тела возросла? Нельзя ли так начертить эту траекторию, чтобы, обойдя по ней, тело приобрело чуть-чуть больше скорости, чем имело вначале? Так получится вечное движение. Но ведь оно невозможно, значит, мы обязаны доказать, что такая траектория немыслима. Мы должны доказать следующее предположение: раз трения нет, тело должно вернуться ни с меньшей, ни с большей скоростью, а как раз с такой, чтобы еще и еще делать круги по этому замкнутому пути. Или, другими словами, вся работа, *произведенная в движении по замкнутому пути, должна быть нулем* для сил тяжести, потому что если бы она не была нулем, то можно было бы получить энергию за счет такого движения тела. (Если бы работа оказалась меньше нуля, так что скорость в конце обхода уменьшилась бы, то для получения энергии стоило бы только повернуть обратно; силы ведь зависят не от направления движения, а только от положения. Если в одном направлении работа получится с плюсом, то в обратном она будет с минусом; любая ненулевая работа означает создание вечного двигателя.)

Так что же, действительно ли работа равна нулю? Попробуем показать, что да. Сперва мы лишь на пальцах поясним, почему это так, а уж потом оформим математически. Положим, мы выдумали траекторию, показанную на фиг. 13.3; масса падает от *1* к *2*, поворачивает до *3*, обратно поднимается к *4*, затем через *5*, *6*, *7*, *8* движется обратно к *1*. Все линии идут либо по радиусу, либо по кругу с центром M. Какая работа совершается на таком пути? Между *1* и *2* она равна произведению GMm на разность $1/r$ в этих точках:

$$W_{12}=\int_1^2 \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s}=\int_1^2\left(-GMm\right)\frac{dr}{r^2}=-GMm\left(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_1}\right).$$

От *2* до *3* сила в точности направлена поперек движения, и $W_{23}=0$. От *3* к *4*

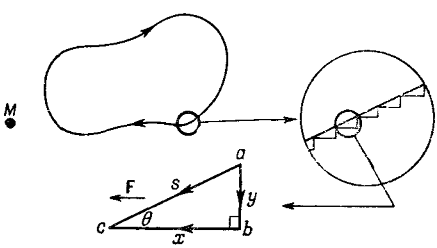
$$W_{34}=\int_3^4 \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s}=-GMm\left(\frac{1}{r_4}-\frac{1}{r_3}\right).$$

Так же получаются $W_{45}=0$, $W_{56}=-GMm(1/r_6-1/r_5)$, $W_{67}=0$, $W_{78}=-GMm(1/r_8-1/r_7)$ и $W_{81}=0$. Всего

$$W=GMm\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}-\frac{1}{r_4}+\frac{1}{r_5}-\frac{1}{r_6}+\frac{1}{r_7}-\frac{1}{r_8}\right).$$

Но ведь $r_2=r_3$, $r_4=r_5$, $r_6=r_7$, $r_8=r_1$. Поэтому $W=0$.

Но возникает подозрение, не слишком ли эта кривая проста. А что даст *настоящая* траектория? Что ж, попробуем настоящую. Сразу же ясно, что ее можно достаточно точно представить как ряд зазубрин (фиг. 13.4) и поэтому... и т. д., что и требовалось доказать. Но надо еще посмотреть, действительно ли работа обхода вокруг маленького треугольника тоже равна нулю. Увеличим один из треугольников (см. фиг. 13.4). Равны ли работы по пути от a к b и от b к c работе, совершаемой, когда идешь напрямик от a к c? Пусть сила действует в каком-то на-



Фиг. 13.4. «Плавный» путь обхода.

Показан увеличенный отрезок этого пути и близкая к нему траектория, состоящая из радиальных и круговых участков, а также один из зубцов этой траектории.

правлении. Расположим треугольник так, чтобы у его катета bc было как раз такое направление. Предположим также, что сам треугольник так мал, что сила всюду на нем постоянна. Какова работа на отрезке ac? Она равна

$$W_{ac} = \int_a^c \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = Fs\cos\theta$$

(поскольку сила постоянна). Теперь определим работу на двух катетах. На вертикальном катете ab сила перпендикулярна к ds, так что работа равна нулю. На горизонтальном катете bc

$$W_{bc} = \int_b^c \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = Fx.$$

Мы убеждаемся таким образом, что работа обхода по бокам маленького треугольника такая же, как и по склону, потому что $s\cos\theta$ равно x. Мы уже показали прежде, что работа при движении по зазубринам (как на фиг. 13.3) равна нулю, а теперь видим, что производимая работа одинакова, независимо от того, движемся ли мы по зазубринам или срезаем путь между ними (если только зазубрины малы, но ведь ничто не мешает сделать их такими); поэтому *работа обхода по любому замкнутому пути в поле тяготения равна нулю.*

Это очень примечательный результат. Благодаря ему нам становятся известны такие подробности о движении планет, о которых мы раньше и не догадывались. Выясняется, что когда планета вертится вокруг Солнца одна, без спутников и в отсутствие каких-либо других сил, то квадрат ее скорости минус некоторая константа, деленная на расстояние до Солнца, вдоль орбиты не меняется. Например, чем ближе планета к Солнцу, тем быстрее она движется. Но насколько быстрее? А вот насколько: если вместо движения вокруг Солнца вы толкнете ее к Солнцу с той же скоростью и подождете, пока она не упадет на нужное расстояние, то приобретенная скорость будет как раз такой, какой планета обладает на этой орбите, потому что получился просто другой пример сложного пути обхода. Если планета вернется по такому пути обратно, ее кинетическая энергия окажется прежней. Поэтому независимо от того, движется ли она по настоящей невозмущенной орбите или же по сложному пути (но без трения), кинетическая энергия в момент возвращения на орбиту оказывается как раз такой, какой нужно.

Значит, когда мы проводим численный анализ движения планеты по орбите (как мы делали раньше), мы можем проверить, не сделали ли заметных ошибок при расчете этой постоянной величины, энергии, на каждом шаге; она не должна меняться. Для орбиты, приведенной в табл. 9.2 (стр. 170), энергия меняется * примерно на 1,5% с начала движения до конца. Почему? То ли потому, что в численном методе мы пользовались конечными приращениями, то ли из-за мелких погрешностей в арифметике.

Рассмотрим энергию в другой задаче: задаче о массе, подвешенной на пружине. Когда отклоняют массу от положения равновесия, сила, восстанавливающая ее положение, пропорциональна смещению. Можно ли в этих условиях вывести закон сохранения энергии? Да; потому что работа, совершаемая этой силой, равна

$$W=\int_0^x \mathbf{F}\cdot d\mathbf{x}=\int_0^x (-kx)\,dx=-\frac{1}{2}kx^2. \qquad (13.13)$$

Значит, у массы, подвешенной на пружине, сумма кинетической энергии ее колебаний и $^1/_2\, kx^2$ постоянна. Посмотрим, как это происходит. Оттянем массу вниз; она неподвижна и скорость ее равна нулю, но x не равно нулю, теперь величина x максимальна, так что имеется и некоторый запас энергии (потенциальной). Отпустим теперь массу: начнется какой-то процесс (в детали мы не вникаем), но в любое мгновение кинетическая плюс потенциальная энергии будут постоянны. Например, когда масса проходит через точку первоначального равновесия, то $x=0$, но тогда значение v^2 наибольшее, и чем больше величина x^2, тем меньше v^2 и т. д. Значит, во время колебаний соблюдается равновесие между величинами x^2 и v^2. Мы получили, таким образом, новое правило: потенциальная энергия пружины равна $^1/_2\, kx^2$, если сила равна $-kx$.

§ 3. *Сложение энергий*

Перейдем теперь к более общему случаю и рассмотрим, что́ произойдет, если тел много. Предположим, что имеется несколько тел; пронумеруем их: $i=1, 2, 3, \ldots$ и пусть все они притягивают друг друга. Что тогда произойдет? Можно доказать, что если сложить кинетические энергии всех тел и добавить сюда сумму (по всем *парам* частиц) их взаимных потенциальных энергий тяготения $-GMm/r_{ij}$, то все вместе даст постоянную:

$$\sum \frac{1}{2} m_i v_i^2+\sum_{\text{пары } ij}\left(-\frac{Gm_im_j}{r_{ij}}\right)=\text{const}. \qquad (13.14)$$

Как же это доказать? Мы продифференцируем обе стороны по времени и докажем, что получится нуль. При дифференцировании $^1/_2\, m_iv_i^2$ мы получим производные скорости — силы [как в (13.5)], а потом эти силы заменим их величиной, известной нам

* Энергия в единицах табл. 9.2 есть $^1/_2\,(v_x^2+v_y^2)-1/r$.

из закона тяготения, и увидим в конце концов, что останется как раз производная по времени от

$$\sum_{\text{пары}}\left(-\frac{Gm_im_j}{r_{ij}}\right).$$

Начинаем доказательство. Производная кинетической энергии по времени есть

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\sum_i \frac{1}{2}m_iv_i^2=\sum_i m_i\mathbf{v}_i\cdot\left(\frac{d\mathbf{v}_i}{dt}\right)=\sum_i \mathbf{F}_i\cdot\mathbf{v}_i=\\=\sum_i\left(\sum_j-\frac{Gm_im_j\mathbf{r}_{ij}}{r_{ij}^3}\right)\cdot\mathbf{v}_i.\end{aligned}\tag{13.15}$$

Производная по времени от потенциальной энергии есть

$$\frac{d}{dt}\sum_{\text{пары}}\left(-\frac{Gm_im_j}{r_{ij}}\right)=\sum_{\text{пары}}\left(+\frac{Gm_im_j}{r_{ij}^2}\right)\left(\frac{dr_{ij}}{dt}\right),$$

но

$$r_{ij}=\sqrt{(x_i-x_j)^2+(y_i-y_j)^2+(z_i-z_j)^2},$$

так что

$$\begin{aligned}\frac{dr_{ij}}{dt}=\frac{1}{2r_{ij}}\left[2(x_i-x_j)\left(\frac{dx_i}{dt}-\frac{dx_j}{dt}\right)+2(y_i-y_j)\left(\frac{dy_i}{dt}-\frac{dy_j}{dt}\right)+\right.\\\left.+2(z_i-z_j)\left(\frac{dz_i}{dt}-\frac{dz_j}{dt}\right)\right]=\mathbf{r}_{ij}\cdot\frac{\mathbf{v}_i-\mathbf{v}_j}{r_{ij}}=\mathbf{r}_{ij}\cdot\frac{\mathbf{v}_i}{r_{ij}}+\mathbf{r}_{ji}\cdot\frac{\mathbf{v}_j}{r_{ji}},\end{aligned}$$

потому что $\mathbf{r}_{ij}=-\mathbf{r}_{ji}$, хотя $r_{ij}=r_{ji}$. Итак,

$$\frac{d}{dt}\sum_{\text{пары}}\left(-\frac{Gm_im_j}{r_{ij}}\right)=\sum_{\text{пары}}\left[\frac{Gm_im_j\mathbf{r}_{ij}}{r_{ij}^3}\cdot\mathbf{v}_i+\frac{Gm_im_j\mathbf{r}_{ji}}{r_{ji}^3}\cdot\mathbf{v}_j\right].\tag{13.16}$$

Теперь внимательно посмотрим, что значит $\sum\limits_i\left\{\sum\limits_j\right\}$ и $\sum\limits_{\text{пары}}$. В (13.15) $\sum\limits_i\left\{\sum\limits_j\right\}$ означает, что i принимает по порядку все значения $i=1, 2, 3,\ldots$, и для каждого i индекс j принимает все значения, кроме i. Если, например, $i=3$, то j принимает значения 1, 2, 4, ...

С другой стороны, в (13.16) $\sum\limits_{\text{пары}}$ означает, что каждая пара i и j встречается лишь однажды. Скажем, частицы 1 и 3 дают только один член в сумме. Чтобы отметить это, можно договориться, что i принимает значения 1, 2, 3, ..., а j для каждого i — только значения, *большие* чем i Если, скажем, $i=3$, то j равно 4, 5, 6, ... Но вспомним, что каждая пара i, j дает два слагаемых в сумме, одно с $\mathbf{v}_i$, а другое с $\mathbf{v}_j$, и что оба эти члена выглядят так же, как член в уравнении (13.14) [но только в последнем в сумму входят *все* значения i и j (кроме $i=j$)]. В уравнениях (13.16) и (13.15) член за членом совпадут по величине. Знаки их, однако, будут противоположны, так что производная по времени от суммы потенциальной и кинетической энергий действительно равна нулю. Итак, мы видим, что и в системе многих тел *кинетическая энергия составляется из суммы энергий отдельных тел* и что потенциальная энергия тоже состоит из взаимных потенциальных энергий пар частиц. Почему она складывается из энергий пар? Это можно уяснить себе следующим образом: положим, мы хотим найти всю работу, которую нужно совершить, чтобы развести тела на определенные расстояния друг от друга. Можно это сделать не за один раз, а постепенно, доставляя их одно за другим из бесконечности, где на них никакие силы не влияли. Сперва мы приведем тело 1, на что работы не потребуется, потому что, пока нет других тел, силы отсутствуют. Доставка тела 2 потребует работы $W_{12}=-Gm_1m_2/r_{12}$. И вот теперь самый существенный момент: мы доставляем тело 3 в точку 3. В любой момент сила, действующая на 3, слагается из двух частей: из силы, действующей со стороны 1, и силы со стороны 2. Значит, и *вся произведенная работа равна сумме работ каждой из сил*, потому что раз $\mathbf{F}_3$ разбивается на сумму сил

$$\mathbf{F}_3=\mathbf{F}_{13}+\mathbf{F}_{23},$$

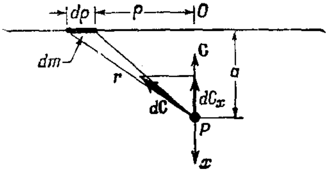
то работа равна

$$\int \mathbf{F}_3\cdot d\mathbf{s}=\int \mathbf{F}_{13}\cdot d\mathbf{s}+\int \mathbf{F}_{23}\cdot d\mathbf{s}=W_{13}+W_{23}.$$

Стало быть, вся работа равна сумме работ, произведенных против силы 1 и против силы 2, как если бы они действовали независимо. Продолжая рассуждать таким образом, мы увидим, что полная работа, которую необходимо выполнить, чтобы собрать данную конфигурацию тел, в точности равна значению (13.14) для потенциальной энергии. Именно из-за того, что тяготение подчиняется принципу наложения сил, можно потенциальную энергию представить в виде суммы по всем парам частиц.

§ 4. *Поле тяготения больших тел*

Теперь рассчитаем поля, встречающиеся во многих физических задачах, когда речь идет о *распределении масс*. Мы пока не рассматривали распределения масс, а занимались только отдельными частицами. Но интересно рассчитать и поля, образуемые более чем одной частицей. Для начала найдем силу притяжения со стороны плоского пласта вещества бесконечной протяженности. Сила притяжения единичной массы в данной точке P (фиг. 13.5), конечно, направлена к плоскости. Расстояние от точки до плоскости есть a, а масса единицы площади этой плоскости есть μ.



Фиг. 13.5. Сила притяжения материальной точки материальной плоскостью.

Пусть μ будет постоянной: слой однороден. Какой же величины поле $d\mathbf{C}$ создается массой dm, удаленной от O не ближе, чем на ϱ, и не дальше, чем на $\varrho+d\varrho$ (O — это точка плоскости, ближайшая к P)? *Ответ*: $d\mathbf{C}=G(dm\mathbf{r}/r^3)$. Но оно, это поле, направлено вдоль r, а мы понимаем, что из трех составляющих $\mathbf{C}$ после сложения всех $d\mathbf{C}$ должна остаться лишь x-составляющая. Она равна

$$dC_x = G\frac{dmr_x}{r^3} = G\frac{dma}{r^3}.$$

Все массы dm, которые находятся на одном и том же расстоянии r от P, дадут одно и то же значение dC_x, так что за dm можно сразу принять массу всего кольца между ϱ и $\varrho+d\varrho$, т. е. $dm=\mu 2\pi\varrho d\varrho$ ($2\pi\varrho d\varrho$— это площадь кольца радиусом ϱ и шириной $d\varrho$ при $d\varrho\ll\varrho$). Итак,

$$dC_x = G\mu 2\pi\varrho\frac{d\varrho a}{r^3}.$$

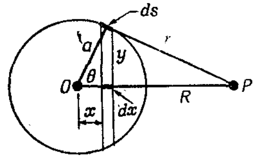
Но $\varrho d\varrho=rdr$ из-за того, что $r^2=\varrho^2+a^2$. Поэтому

$$C_x = 2\pi G\mu a\int_a^\infty \frac{dr}{r^2} = 2\pi G\mu a\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{\infty}\right) = 2\pi G\mu. \qquad (13.17)$$

Стало быть, сила не зависит от расстояния a! Почему? Не ошиблись ли мы? Казалось бы, чем дальше от плоскости, тем сила слабее. Но нет! Если точка находится вплотную к плоскости, то большая часть вещества притягивает ее под неудачными углами, а если вдалеке, то у большей части вещества притяжение направлено прямее к плоскости. На любом расстоянии самая «влиятельная» часть плоскости лежит в некотором конусе. С удалением сила ослабляется обратно пропорционально квадрату расстояния, но в том же конусе под тем же углом оказывается *больше вещества*, а рост количества вещества тоже пропорционален квадрату расстояния! Этот анализ может быть сделан более строгим, если заметить, что дифференциал вклада любого данного конуса не зависит от расстояния в результате противоположных изменений напряженности поля данной массы и количества самой этой массы (с ростом расстояния). Впрочем, на самом деле сила не постоянна, ибо на другой стороне плоскости она меняет знак.

Мы решили, кстати, и задачу по электричеству: мы доказали, что у заряженной пластины, каждая единица площади которой

Ф и г. 13.6. *Тонкий сферический слой масс (или зарядов).*



несет заряд σ, электрическое поле равно $\sigma/2\varepsilon_0$ и направлено *от пластины*, если она заряжена положительно, и *к ней*, если она заряжена отрицательно. Чтобы доказать это, надо просто вспомнить, что в законе тяготения G играет ту же роль, что $1/4\pi\varepsilon_0$ в электричестве.

А теперь пусть имеются две пластины, одна с положительным зарядом $+\sigma$, а другая с отрицательным $-\sigma$ (на единицу площади), и пусть промежуток между ними равен D. Каково поле этих пластин? Снаружи пластин поле равно нулю. Отчего? Оттого, что одна из них отталкивает, а другая притягивает и у обеих сила *не зависит от расстояния*; значит, силы всюду уничтожаются! А вот поле *между пластинами* вдвое больше, чем поле одной пластины, направлено оно от положительной пластины к отрицательной и равно $E=\sigma/\varepsilon_0$.

Перейдем теперь к еще более интересному и важному вопросу; впрочем, мы давно уже ответили на него, предположив, что сила притяжения Земли в точке на ее поверхности или над нею такая же, как если бы вся масса Земли сосредоточилась в ее центре. Справедливость этого предположения не очевидна: ведь когда мы находимся у самой земли, какая-то часть ее массы очень к нам близка, а другая далека и т. д. Когда мы складываем действие всех таких масс, то кажется чудом, что в конце концов сила сводится к тому, что вся Земля сжалась в одну точку, стянулась к своему центру!

Мы теперь покажем, что это чудо обыкновенное; чтобы продемонстрировать это, разобьем Землю на тонкие сферические слои. Пусть вся масса сферы равна m. Давайте рассчитаем *потенциальную энергию* частицы массы m' на расстоянии R от центра сферы (фиг. 13.6). Мы увидим, что потенциальная энергия как раз такая, как если бы масса m сферы вся собралась в ее центре. (Легче иметь дело с потенциальной энергией, чем с напряженностью поля: не нужно думать об углах, а просто складывать потенциальные энергии всех частей сферы.) Нарежем сферу на узкие пояски, и пусть x — расстояние плоскости пояска от центра сферы; тогда вся масса пояска толщиной dx находится на одном и том же расстоянии r от точки P, а потенциальная энергия притяжения этого пояска равна $-Gm'dm/r$. Сколько же массы содержится в пояске dx? Вот сколько:

$$dm = 2\pi y\mu ds = \frac{2\pi y\mu dx}{\sin\theta} = \frac{2\pi y\mu dxa}{y} = 2\pi a\mu dx,$$

где $\mu = m/4\pi a^2$ — поверхностная плотность массы. (Вообще площадь поверхности шарового пояса пропорциональна его высоте.) Поэтому потенциальная энергия притяжения массы dm есть

$$dW = -\frac{Gm'dm}{r} = -\frac{Gm'2\pi a\mu dx}{r}.$$

Но мы видим, что

$$r^2 = y^2 + (R-x)^2 = y^2 + x^2 + R^2 - 2Rx = a^2 + R^2 - 2Rx.$$

Значит,

$$2rdr = -2Rdx,$$

или

$$\frac{dx}{r} = \frac{dr}{R}.$$

Поэтому

$$dW = -\frac{Gm'2\pi a\mu dr}{R}$$

и получается

$$W = -\frac{Gm'2\pi a\mu}{R}\int_{R-a}^{R+a} dr = -\frac{Gm'2\pi a\mu}{R}2a = -\frac{Gm'(4\pi a^2\mu)}{R} =$$

$$= -\frac{Gm'm}{R}. \qquad (13.18)$$

Стало быть, для тонкого слоя потенциальная энергия массы m', внешней по отношению к слою, такова, как если бы масса слоя собралась в его центре. Землю же можно представить в виде ряда таких слоев, и притяжение каждого из слоев зависит только от его массы; сложив их, получим *всю массу* планеты; значит, и вся Земля действует так, словно все ее вещество находится в ее центре!

Но посмотрим, что произойдет, если точка P окажется внутри слоя. Проделывая те же расчеты вплоть до интегрирования, мы получим разность двух значений r, но уже в другой форме: $(a+R)-(a-R)=2R$ (двойное расстояние от P до центра). Другими словами, теперь W становится равной $W=-Gmm'/a$, что *не зависит от* R, т. е. точка P *всюду* внутри сферы обладает одной и той же энергией тяготения. А значит, на нее не действует никакая сила, и не нужно никакой работы, чтобы двигать ее внутри. Когда потенциальная энергия тела всюду, в любой точке внутри сферы, одинакова, то на тело не действует никакая сила. Внутри сферы тело не испытывает действия сил, сила действует только снаружи.

Глава ***14***

РАБОТА И ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ЭНЕРГИЯ (II)

§ 1. *Работа*

В предыдущей главе мы ввели много новых понятий и идей, играющих важную роль в физике. Идеи эти столь важны, что, пожалуй, стоит посвятить целую главу внимательному ознакомлению с ними. Мы не будем здесь повторять «доказательства» и красивые приемы, позволяющие просто получать важные результаты, а вместо этого сосредоточим наше внимание на обсуждении самих идей.

Штудируя любой вопрос технического характера, для понимания которого нужна математика, мы всегда сталкиваемся с необходимостью понять и отложить в памяти массу фактов и идей, объединенных определенными связями. Существование этих связей можно «доказать» или «показать». Ничего не стоит спутать само доказательство с тем соотношением, которое оно устанавливает. Конечно, куда важнее выучить и запомнить не доказательство, а само соотношение. Тогда уж в любом случае мы сможем сказать: «Легко показать, что...» то-то и то-то верно, а то и действительно показать это. Приводимые доказательства почти всегда состряпаны, сфабрикованы с таким расчетом, чтобы, во-первых, их легко было воспроизвести мелом на доске или пером на бумаге и, во-вторых, чтобы они выглядели поглаже. В итоге доказательство выглядит обманчиво просто, хотя, быть может, на самом деле автор много часов искал разные пути расчета, пока не нашел самый изящный — тот, который приводит к результату за кратчайшее время! Глядя на вывод формулы, надо вспоминать не этот вывод, а скорее сам факт, что то-то и то-то *можно доказать*. Конечно, если доказательство требует особых математических выкладок или «трюков», никогда прежде не виденных, то надо обратить внимание... впрочем, не на сами трюки, а на их идею.

Ни одно из доказательств, приведенных в этом курсе, автор не запомнил с тех времен, когда сам учил физику. Наоборот, он просто вспоминает, что то-то является верным, и, пытаясь пояснить, как это доказывается, сам придумывает доказательство в тот момент, когда оно необходимо. И всякий, кто действительно изучил предмет, должен быть в состоянии поступать так же, не запоминая доказательств. Вот почему в этой главе мы будем избегать вывода различных положений, сделанных ранее, а просто будем подводить итоги.

Первая идея, которую нужно будет переварить,— это то, что *работа производится силой*. Физический термин «работа» ничего общего не имеет с общежитейским ее смыслом...

Физическая работа выражается в виде $\int \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s}$, или «контурный интеграл от $\mathbf{F}$ по $d\mathbf{s}$ скалярно»; последнее означает, что если сила направлена, скажем, в одну сторону, а тело, на которое сила действует, перемещается в другую сторону, то *работу совершает только составляющая силы в направлении перемещения*. Если бы, например, сила была постоянна, а смещение произошло на конечный отрезок $\Delta\mathbf{s}$, то работа, выполненная постоянной силой на этом пути, была бы равна произведению составляющей силы вдоль $\Delta\mathbf{s}$ на Δs. Правило гласит: «работа есть сила на путь», но подразумевается лишь составляющая силы в направлении перемещения, умноженная на Δs, или, что одно и то же, составляющая перемещения в направлении силы, умноженная на $\mathbf{F}$.

Очевидно, что сила, направленная под прямым углом к перемещению, никакой работы не произведет.

Если, далее, вектор смещения $\Delta\mathbf{s}$ разложить на составляющие, т. е. если истинное смещение есть $\Delta\mathbf{s}$ и мы хотим считать, что оно состоит из составляющих смещения Δx в направлении x, Δy в направлении y и Δz в направлении z, то вся произведенная работа перемещения тела из одного места в другое может быть рассчитана по трем частям: отдельно работа смещения вдоль x, вдоль y и вдоль z. Работа перемещения вдоль x требует знания только соответствующей составляющей силы F_x и т. д., так что работа равна $F_x\Delta x+F_y\Delta y+F_z\Delta z$. Когда сила не постоянна, а движение запутанное, криволинейное, то нужно разбить путь на множество малых $\Delta\mathbf{s}$, сложить работы переноса тела вдоль каждого $\Delta\mathbf{s}$ и перейти к пределу при $\Delta\mathbf{s}$, стремящемся к нулю. В этом смысл понятия «контурный интеграл».

Все, что мы только что сказали, содержится в формуле $W = \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$. Но одно дело назвать эту формулу прекрасной, и совсем другое — понять ее смысл и ее следствия.

Смысл слова «работа» в физике настолько отличается от того, что подразумевают под этим словом в обычных обстоятельствах, что надо тщательно проследить это различие. Например, по точному смыслу физического определения работы, если вы держите в руках двухпудовую гирю, вы не совершаете никакой работы. Вас бросает в пот, ваши руки дрожат, вы дышите тяжело, как будто взбежали по лестнице, а работы вы не совершаете. Когда вы взбегаете по лестнице, то считается, что вы *совершаете* работу; когда вы сбегаете по лестнице вниз, то, согласно физике, мир производит работу над вами, а вот когда вы держите предмет, стоя неподвижно, никакой работы не производится. Физическое определение работы отличается от физиологического по причинам, которые мы сейчас кратко изложим.

Когда вы держите груз, вы, конечно, выполняете «физиологическую» работу. Отчего вас бросает в пот? Почему для такого занятия вам необходимо хорошо питаться? Почему все механизмы внутри вас работают в полную силу, когда вы подставили спину под груз? Ведь можно на этот груз не тратить никаких усилий, стоит лишь положить его на стол, и стол спокойно и мирно, не нуждаясь ни в какой энергии, будет держать себе тот же груз на той же высоте! Физиология дает примерно следующее объяснение. У человека и у других животных есть два рода мышц. Одни, называемые *поперечнополосатыми*, или *скелетными*, контролируются нашей волей; таковы, например, мышцы рук. Другие мышцы называются *гладкими* (например, мышцы внутренностей или у моллюсков большой замыкающий мускул, который закрывает створки). Гладкие мышцы работают очень медленно, но способны «оцепенеть»; это значит, что если, скажем, моллюску нужно удержать свои створки в определенном положении, то он их удержит, какая бы сила на них ни нажимала. Многие часы способен он без устали держать створки под нагрузкой, подобно столу, на который положен груз; мышца «застывает» в определенном положении, молекулы ее как бы схватываются друг с другом, не совершая никакой работы, не требуя от моллюска никаких усилий. Нам же нужны непрерывные усилия, чтобы удержать вес. Это объясняется просто устройством поперечнополосатых мышц. Когда нервный импульс достигает мышечного волокна, оно несколько сокращается и затем опять расслабляется; когда мы держим груз, то в мышцу сплошным и обильным потоком текут нервные импульсы, множество волокон сокращается, пока другие отдыхают. Это даже можно увидеть: когда рука устает держать тяжесть, она начинает дрожать. Происходит это потому, что поток импульсов нерегулярен и уставшие мышцы не успевают вовремя на них ответить. Почему же мышцы собраны по такой неудачной схеме? Неизвестно почему, но природа не сумела создать *быстродействующих* гладких мышц. А куда удобнее было бы поднимать грузы именно гладкими мышцами: они способны замирать на месте, они могут цепенеть и для этого не нужно было бы совершать никакой работы и не нужна никакая энергия. Правда, у этих мышц есть один недостаток: они очень медленно работают.

Но вернемся к физике и зададим еще один вопрос: *зачем* нам подсчитывать выполненную работу? *Ответ*: потому что это интересно и полезно. Потому что работа, которую производит над частицей равнодействующая всех приложенных к ней сил, в точности равна изменению кинетической энергии этой частицы. Если тело толкнуть, оно наберет скорость, и

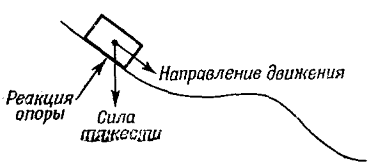
$$\Delta(v^2) = \frac{2}{m}\,\mathbf{F}\cdot\Delta\mathbf{s}.$$

§ 2. Движение при наложенных связях

Силы и работа обладают еще одним интересным свойством. Пусть имеется некоторый уклон, какая-то криволинейная колея, по которой частица должна двигаться без трения. Или имеется маятник — груз на ниточке; нить маятника вынуждает груз двигаться по кругу вокруг точки подвеса. Намотав нить на колышек, можно в качании менять точку подвеса, так что траектория груза будет складываться из двух окружностей разного радиуса. Все это примеры так называемых *неподвижных связей без трения*.

В движении с неподвижными связями без трения эти связи не производят никакой работы, потому что реакции связей всегда прилагаются к телу под прямым углом к самим связям; так обстоит дело и с реакцией колеи и с натяжением нити.

Силы, возникающие при движении частицы вниз по склону под действием тяжести, весьма и весьма запутаны: здесь и реакции связи, и сила тяжести, и т. п. И все же, если основывать свои расчеты движения лишь на сохранении энергии и на учете *только силы тяжести*, получается правильный результат. Это выглядит довольно странно, потому что это не совсем правильно; надо было бы пользоваться *равнодействующей*



Фиг. 14.1. Силы, действующие на тело, скользящее без трения.

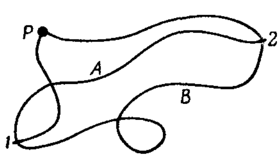
силой. Тем не менее работа, произведенная только силой тяжести, оказывается равной изменению кинетической энергии, потому что работа сил связей равна нулю (фиг. 14.1).

Важное свойство сил, о котором мы говорили, состоит в том, что если силу можно разбить на две или несколько «частей», то работа, выполняемая самой силой при движении по некоторой кривой, равна сумме работ, произведенных каждой «частью» силы. Если мы представляем силу в виде векторной суммы нескольких сил (силы тяжести, реакции связей и т. д., или x-составляющих всех сил плюс y-составляющие и т. д., или еще как-нибудь), то работа всей силы равна сумме работ тех частей, на которые мы ее разделили.

§ 3. *Консервативные силы*

В природе существуют силы, скажем сила тяжести, обладающие замечательным свойством — «консервативностью» (никаких политических идей, ничего двусмысленного в этом понятии нет). Когда мы подсчитываем, какую работу выполняет сила, двигая тело от одной точки к другой, то вообще работа зависит от траектории; но в особых случаях эта зависимость пропадает. Если работа не зависит от траектории, мы говорим, что сила консервативна. Иными словами, если интеграл от произведения силы на приращения смещений между точками *1* и *2* (фиг. 14.2) один раз вычислен вдоль кривой A, а другой — вдоль кривой B, и оба раза получается одинаковое количество джоулей, и если это выполнено для *любой кривой*, соединяющей эту пару точек, и если это же справедливо *для любой пары точек*, то говорят, что сила консервативна. В таких обстоятельствах интеграл работы между точками *1* и *2* можно легко подсчитать и дать для него формулу. А в других случаях это не так просто: нужно задавать еще форму кривой; но когда работа не зависит от кривой, то, ясное дело, остается только зависимость от *положений* точек *1* и *2*.

Чтобы доказать это, рассмотрим фиг. 14.2. Фиксируем произвольную точку P. Криволинейный интеграл работы на участке (*1*,*2*) можно вычислить, разбив его на две части: работу на участке (*1*, P) и работу на участке (P, *2*), потому что сейчас у нас всюду консервативные силы, и по какому пути ни пойти, значение работы одно и то же. Работа перемещения из точки



Фиг. 14.2. Возможные пути, соединяющие две точки в поле сил.

P в любую точку пространства является функцией положения конечной точки. Она зависит и от P, но мы во всем дальнейшем анализе точку P закрепим, так что работа перемещения тела от точки P к точке *2* будет некоторой функцией положения точки *2*. Она зависит от того, где находится точка *2*; если переместить тело в другую точку, ответ будет другой.

Обозначим эту функцию положения через $-U(x, y, z)$; желая отметить, что речь идет именно о точке *2* с координатами x_2, y_2, z_2, мы будем просто писать $U(2)$, сокращая обозначение $U(x_2, y_2, z_2)$. Работу перемещения из точки *1* в точку P можно написать, обратив направление интегрирования (переменив знаки всех $d\mathbf{s}$). Другими словами, работа на участке $(1,P)$ равна работе на участке $(P,1)$ со знаком минус:

$$\int_1^P \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} = \int_P^1 \mathbf{F}\cdot(-d\mathbf{s}) = -\int_P^1 \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s}.$$

Значит, работа на участке $(P,1)$ есть $-U(1)$, а на участке $(P,2)$ есть $-U(2)$. Поэтому интеграл от *1* до *2* равен $-U(2)$ плюс $[-U(1)$ назад$]$, т. е. $+U(1)-U(2)$:

$$U(1) = -\int_P^1 \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s}, \quad U(2) = -\int_P^2 \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s},$$

$$\int_1^2 \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} = U(1) - U(2). \tag{14.1}$$

Величина $U(1)-U(2)$ называется изменением потенциальной энергии, а U можно назвать потенциальной энергией. Мы будем говорит, что когда предмет находится в положении *2*, то он обладает потенциальной энергией $U(2)$, а в положении *1* — потенциальной энергией $U(1)$. Когда он находится в положении P, его потенциальная энергия равна нулю. Если бы вместо P взять любую другую точку Q, то оказалось бы (это предоставляется доказать вам самим), что *потенциальная энергия всех точек изменилась бы только на постоянную добавку.* Так как сохранение энергии зависит только от *изменений* ее, то эта добавочная постоянная никакого значения не имеет. Вот поэтому точка P произвольна.

Итак, у нас имеются два утверждения: 1) работа, выполняемая силой, равна изменению кинетической энергии системы, но 2) математически для консервативных сил выполненная работа равна минус изменению функции U, называемой потенциальной энергией. Как следствие этих утверждений возникает еще одно: *если действуют только консервативные силы, сумма потенциальной U и кинетической T энергий остается постоянной:*

$$T + U = \text{const}. \tag{14.2}$$

Рассмотрим формулу потенциальной энергии для ряда случаев. Если поле тяготения однородно, если мы не поднимаемся до высот, сравнимых с радиусом Земли, то сила постоянна и направлена вертикально, а работа равна просто произведению силы на расстояние по вертикали. Стало быть,

$$U(z)=mgz, \tag{14.3}$$

и за точку P с нулевой потенциальной энергией можно принять любую точку на поверхности $z=0$. Но можно также говорить, что потенциальная энергия равна $mg(z-6)$, если нам так уж этого хочется! Все результаты в нашем анализе останутся теми же, кроме того что потенциальная энергия на поверхности $z=0$ будет равна $-mg6$. Разницы никакой, ведь в расчет надо принимать только *разности* потенциальных энергий.

Энергия, необходимая для сжатия пружины на расстояние x от точки равновесия, равна

$$U(x)=\frac{1}{2}kx^2, \tag{14.4}$$

и нуль потенциальной энергии приходится на точку $x=0$, т. е. на равновесное состояние пружины. И здесь тоже мы можем добавить любую константу.

Потенциальная энергия тяготения точечных масс M и m на расстоянии r друг от друга равна

$$U(r)=-\frac{GMm}{r}. \tag{14.5}$$

Константа здесь выбрана так, чтобы потенциал исчезал на бесконечности. Конечно, эту же формулу можно применить и к электрическим зарядам, поскольку закон один и тот же:

$$U(r)=\frac{q_1q_2}{4\pi\varepsilon_0 r}. \tag{14.6}$$

Давайте теперь поработаем с одной из этих формул, посмотрим, поняли ли мы их смысл.

Вопрос: С какой скоростью должна отправиться ракета с Земли, чтобы покинуть ее?

Ответ: Сумма кинетической и потенциальной энергий должна быть постоянной; покинуть Землю — значит удалиться от нее на миллионы километров; если у ракеты только-только хватает сил, чтобы покинуть Землю, то надо предположить, что там, вдалеке, ее скорость будет равна нулю и что на бесконечности она будет едва-едва двигаться. Пусть a — радиус Земли, а M — ее масса. Кинетическая плюс потенциальная энергии первоначально были равны $^1/_2\, mv^2 - GmM/a$. В конце движения эти обе энергии должны сравняться. Кинетическую энергию в конце движения мы считаем нулевой, потому что тело еле движется (почти с нулевой скоростью), а потенциальная энергия равна величине GmM, деленной на бесконечность, т. е. опять нулевая. Значит, с одной стороны стоит разность двух нулей; поэтому квадрат скорости должен быть равен $2GM/a$. Но GM/a^2 это как раз то, что называют ускорением силы тяжести g. Итак,

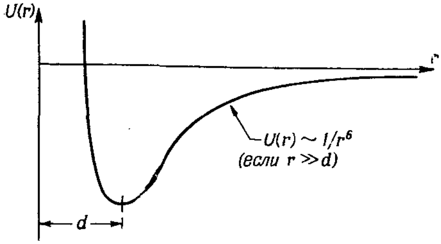
$$v^2 = 2ga.$$

С какой скоростью должен двигаться искусственный спутник, чтобы не падать на Землю? Мы когда-то решали эту задачу и получили $v^2 = GM/a$. Значит, чтобы покинуть Землю, нужна скорость, в $\sqrt{2}$ большая, чем скорость вращения спутника вокруг Земли. Иными словами, чтобы улететь с Земли, нужно *вдвое больше энергии* (энергия пропорциональна квадрату скорости), чем чтобы облететь вокруг нее. Поэтому исторически сначала были совершены облеты искусственных спутников вокруг Земли, для чего понадобились скорости около 7,8 *км/сек*. И только потом космические корабли были заброшены в мировое пространство; для этого потребовалось уже вдвое больше энергии, т. е. скорости около 11,2 *км/сек*.

Продолжим теперь наш обзор характеристик потенциальной энергии. Давайте рассмотрим взаимодействие двух молекул или двух атомов, например двух атомов кислорода. Когда они находятся далеко друг от друга, они притягиваются с силой, обратно пропорциональной седьмой степени расстояния, а при тесном сближении они сильно отталкиваются. Проинтегрировав минус седьмую степень расстояния, чтобы получить работу, мы увидим, что потенциальная энергия U (функция расстояния между атомами кислорода) изменяется как минус шестая степень расстояния (на больших расстояниях).

Если мы чертим некую кривую потенциальной энергии $U(r)$ (фиг. 14.3), то при больших r она выглядит как r^{-6}, а при достаточно малых r достигает минимума. Минимум потенциальной энергии в точке $r = d$ означает, что если мы сдвинемся от нее на малое расстояние, на очень малое расстояние, то произведенная работа, равная изменению потенциальной энергии на этом промежутке, почти равна нулю, потому что на донышке кривой энергия почти не меняется. Значит, в этой точке сила равна нулю, и это есть точка равновесия. Условие равновесия можно высказать и иначе: для удаления из точки равновесия в любую сторону нужно затратить работу. Когда два атома кислорода расположены так, что никакой энергии из их силы взаимодействия больше выжать нельзя, то они находятся в наинизшем энергетическом состоянии и промежуток между ними равен d. Так выглядит молекула кислорода, когда она не нагрета. При нагревании атомы колеблются и расходятся; их можно и совсем развести, но для этого нужно определенное количество работы или энергии, равное разности потенциальных энергий в точках

Фиг. 14.3. Потенциальная энергия взаимодействия двух атомов как функция расстояния между ними.



$r=d$ и $r=\infty$. При попытке сблизить атомы энергия быстро возрастает вследствие их взаимного отталкивания.

Почему мы говорим о потенциальной энергии? Потому что идея *силы* не очень пригодна для квантовой механики, там более естественна идея *энергии*. Когда мы рассматриваем более сложные взаимодействия: ядерного вещества, молекул и т. д., то, хотя понятия силы и скорости «рассасываются» и исчезают, оказывается, что понятие энергии все же остается. Поэтому в книгах по квантовой механике мы находим кривые потенциальной энергии, но очень редко увидим график силы взаимодействия двух молекул, потому что те, кто изучает эти явления, больше уже привыкли думать об энергии, чем о силе.

Заметим еще, что, когда на тело одновременно действуют несколько консервативных сил, потенциальная энергия тела есть сумма потенциальных энергий от каждой силы. Это то, что мы утверждали и раньше, потому что, когда сила представляется векторной суммой сил, работа, производимая ею, равна сумме работ, производимых отдельными силами; поэтому ее можно представить как изменения потенциальных энергий от каждой силы по отдельности. Значит, общая потенциальная энергия равна сумме всех частей.

Мы можем обобщить это на случай системы многих тел, как, например, Юпитера, Сатурна, Урана и т. д. или атомов кислорода, азота, углерода и т. д., взаимодействующих друг с другом попарно, причем силы взаимодействия каждой пары консервативны. В таких условиях кинетическая энергия всей системы есть просто сумма кинетических энергий всех отдельных атомов, или планет, или частиц, а потенциальная энергия системы есть сумма потенциальных энергий взаимодействия отдельных пар, рассчитанных в предположении, что других частиц нет. (На самом деле для молекулярных сил это неверно, и формула получается несколько сложнее; для ньютонова тяготения это определенно справедливо, а для молекулярных сил годится лишь как приближение. Можно, конечно, говорить о потенциальной энергии молекулярных сил, но она иногда оказывается более сложной функцией положений атомов, чем простая сумма попарных взаимодействий.) Поэтому потенциальная энергия в частном случае тяготения представляется суммой по всем парам i и j членов $-Gm_im_j/r_{ij}$ [как было показано в уравнении (13.14)]. Уравнение (13.14) выражает математически следующее предложение: общая потенциальная плюс общая кинетическая энергии не меняются со временем. Пусть себе различные планеты вращаются, обращаются и покачиваются, все равно если подсчитать общую потенциальную и общую кинетическую энергии, то окажется, что их сумма всегда остается постоянной.

§ 4. *Неконсервативные силы*

Мы потратили немало времени, обсуждая свойства консервативных сил. Что же мы теперь скажем о *неконсервативных* силах? Мы хотим разобраться в этом вопросе более подробно, чем это обыкновенно делают, и показать, что неконсервативных сил не бывает! Оказывается, все основные силы природы, по-видимому, консервативны. Не подумайте, что это следствие из законов Ньютона. На самом деле, насколько представлял себе это сам Ньютон, силы могут быть неконсервативными, как, например, трение, которое кажется неконсервативным. Употребляя слово «кажется», мы проводим современную точку зрения, которая доказывает, что все глубинные силы, все силы взаимодействия между частицами на самом фундаментальном уровне суть силы консервативные.

Когда мы, например, анализируем систему наподобие большого шарового звездного скопления (фотографию такого скопления мы показывали) с тысячами взаимодействующих звезд, то формула для общей потенциальной энергии состоит просто из суммы слагаемых, каждое из которых выражает взаимодействие какой-то пары звезд; точно так же и кинетическая энергия есть сумма кинетических энергий всех отдельных звезд. Но шаровое скопление как целое движется и в пространстве, и окажись мы от него так далеко, что не смогли бы различать отдельных деталей, мы бы приняли его за единый предмет. Если бы при этом к нему были приложены какие-то силы, то часть из них могла бы двигать его как целое и мы бы увидели, как центр этого тела движется. С другой стороны, прочие силы могли бы, если так можно выразиться, «тратиться» на повышение потенциальной или кинетической энергии «частиц» внутри «тела». Положим, например, что действие этих сил привело бы к расширению всего скопления и увеличению скоростей «частиц». Общая энергия «тела» на самом деле сохранялась бы. Но, глядя издалека нашими слабыми глазами, не различающими беспорядочных внутренних движений, мы бы видели только кинетическую энергию всего тела и нам бы казалось, что энергия не сохраняется, хотя все дело было бы в том, что мы не различаем деталей. Оказывается, что это всегда так: общая энергия Вселенной, кинетическая плюс потенциальная, если как следует посмотреть, всегда постоянна.

Изучая тончайшие свойства вещества на атомном уровне, *не всегда легко* разделить общую энергию на две части, потенциальную и кинетическую, и не всегда такое разделение необходимо. Во всяком случае, оно возможно *почти* всегда, так что давайте говорить, что оно *всегда* возможно и что потенциальная плюс кинетическая энергии мира постоянны. Итак, общая потенциальная плюс кинетическая энергии внутри целого мира постоянны, и если «мир» — это изолированный кусок вещества, то энергия его постоянна, если только нет внешних сил. Но, как мы видели, часть кинетической и потенциальной энергий предмета может быть внутренней (например, внутренние молекулярные движения), внутренней в том смысле, что мы ее не замечаем. Мы знаем, что в стакане воды все колеблется, все части беспрерывно движутся, так что внутри имеется определенная кинетическая энергия, на которую мы обычно никакого внимания не обращаем. Мы не замечаем движения атомов, рождающего теплоту, и поэтому не называем его кинетической энергией, но основа тепла — все-таки кинетическая энергия. Точно так же и внутренняя потенциальная энергия может, например, иметь форму химической энергии: когда мы сжигаем бензин, выделяется энергия, потому что потенциальные энергии атомов при новом их размещении оказываются ниже, чем при прежнем расположении. Строго говоря, теплоту нельзя считать чисто кинетической энергией, в нее входит и часть потенциальной энергии; то же относится и к химической энергии, так что лучше объединить их и говорить, что общая кинетическая и потенциальная энергии внутри тела — это частично тепло, частично химическая энергия и т. д. Во всяком случае, все эти различные формы внутренней энергии иногда рассматривают как «потерянную» энергию в том смысле, как сказано выше; когда мы изучим термодинамику, нам все это станет яснее.

В качестве другого примера возьмем трение. Неверно, что кинетическая энергия в результате трения исчезает; это неверно, хотя скользящее тело и впрямь останавливается и кажется, что кинетическая энергия пропала. Но она не пропадает, ибо атомы внутри тела начинают двигаться с большим запасом кинетической энергии; хоть мы этого и не можем увидеть, но можно догадаться об этом по повышению температуры. Конечно, если не обращать внимания на тепловую энергию, то теорема о сохранении энергии покажется неправильной.

Еще в одном случае может показаться, что энергия не сохраняется: когда мы изучаем часть всей системы. Вполне естественно, что если что-то взаимодействует с чем-то внешним и мы пренебрегаем этим взаимодействием, то теорема о сохранении энергии будет выглядеть неверной.

В классической физике в потенциальную энергию включались только тяготение и электричество, но теперь у нас есть и атомная энергия и многое другое. В классической теории, например, свет — это особая форма энергии, но можно, если нам этого хочется, представить себе энергию света как кинетическую энергию фотонов, и тогда наша формула (14.2) опять окажется справедливой.

§ 5. *Потенциалы и поля*

Теперь обратимся к некоторым идеям, связанным с потенциальной энергией и с понятием *поля*. Пусть два больших тела A и B притягивают к себе третье малое тело с суммарной силой $\mathbf{F}$. Мы уже отмечали в гл. 12, что сила притяжения частицы может быть представлена как произведение ее массы m на вектор $\mathbf{C}$, зависящий лишь от *положения* частицы:

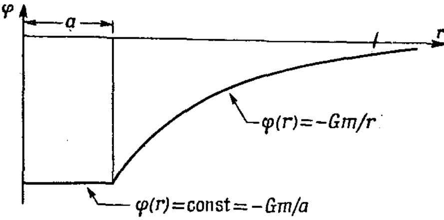
$$\mathbf{F}=m\mathbf{C}.$$

Тяготение можно анализировать, считая, что в каждом месте пространства имеется вектор $\mathbf{C}$, который «действует» на массу, помещенную в это место, но который присутствует там безотносительно к тому, поместили ли мы туда массу или нет. Вектор $\mathbf{C}$ имеет три составляющие, и каждая из них является функцией от (x, y, z) — функцией положения в пространстве. Такую вещь мы называем *полем* и говорим, что тела A и B *создают* поле, т. е. «делают» вектор $\mathbf{C}$. Когда тело помещено в поле, то сила действия на это тело равна его массе, умноженной на величину вектора поля в той точке, куда тело попало.

С потенциальной энергией можно сделать то же самое. Так как потенциальная энергия, интеграл от (Сила)$\cdot$($d\mathbf{s}$), может быть записана в виде массы m, умноженной на интеграл от (Поле)$\cdot$($d\mathbf{s}$) — это простое изменение масштаба, — то потенциальную энергию $U(x, y, z)$ тела, расположенного в точке (x, y, z), можно записать как произведение m на другую функцию. Назовем ее *потенциалом* Ψ. Интеграл $\int \mathbf{C}\cdot d\mathbf{s}$ равен $-\Psi$, подобно тому как $\int\mathbf{F}\cdot d\mathbf{s}=-U$; они отличаются только масштабом:

$$U=-\int \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s}=-m\int \mathbf{C}\cdot d\mathbf{s}=m\Psi. \tag{14.7}$$

Зная в каждой точке пространства эту функцию $\Psi\,(x, y, z)$, можно немедленно вычислить потенциальную энергию тела в любой точке, а именно $U(x, y, z) = m\Psi\,(x, y, z)$. Теперь, как видите, это стало делом пустяковым. Но на самом деле это отнюдь не пустяк, потому что иногда намного приятнее описать поле, задав распределение потенциала во всем пространстве,



Фиг. 14.4. Потенциал тяготеющего сферического слоя радиусом а.

чем задавать **C**. Вместо трех сложных компонент векторной функции проще задать скалярную функцию Ψ. Кроме того, когда поле создается многими массами, величину Ψ рассчитывать легче, чем три компоненты **C**: потенциалы—скаляры, их можно просто складывать, не заботясь о направлениях сил. А поле **C**, как мы сейчас увидим, легко восстановить, зная Ψ.

Пусть у нас есть точечные массы m_1, m_2,... в точках 1, 2..., и мы хотим знать потенциал Ψ в некоторой произвольной точке P. Тогда он оказывается простой суммой потенциалов отдельных масс в точке P:

$$\Psi(P)=\sum_i\left(-\frac{Gm_i}{r_{iP}}\right),\quad i=1,\ 2,\ \dots . \qquad (14.8)$$

Этой формулой, представляющей потенциал в виде суммы потенциалов отдельных масс, мы пользовались в предыдущей главе, чтобы вычислить потенциал сферического слоя (мы тогда сложили потенциалы всех поясков, на какие был нарезан слой). Итог расчета показан на фиг. 14.4. Потенциал отрицателен, равен нулю на бесконечности, падает как $1/r$, пока r не станет равным a, и затем внутри слоя становится постоянным. Вне слоя потенциал равен $-Gm/r$ (m — масса слоя), что полностью совпадает с потенциалом точки с массой m, помещенной в центре сферического слоя. Но такое совпадение существует только для точек снаружи слоя, а во внутренних точках потенциал оказывается равным $-Gm/a$ и больше не меняется! А *когда потенциал постоянен, то поля нет*: если потенциальная энергия не меняется, то сила отсутствует, потому что, когда мы двигаем тело из одной внутренней точки в другую, работа, выполняемая силой, в точности равна нулю. Почему? Да потому, что работа передвижения тела из одной точки в другую равна минус изменению потенциальной энергии (или соответствующий интеграл от поля равен изменению потенциала). Но потенциальная энергия в обеих точках *одинакова*, значит, ее изменение равно нулю, и поэтому никакой работы при любых движениях внутри сферического слоя не производится. А это возможно лишь тогда, когда внутри слоя нет никаких сил.

В этих рассуждениях кроется ключ к вычислению силы или напряженности поля, когда потенциальная энергия известна.

Пусть потенциальная энергия тела в точке (x, y, z) дана, а мы хотим узнать, какая сила действует на него в этой точке. Для этого нужно знать потенциал не только в этой точке, но и в соседних. Почему? Попробуем вычислить x-компоненту силы (если мы это сумеем сделать, то точно таким же способом мы вычислим и y- и z-компоненты, определив тем самым всю силу). Если б мы сдвинули тело на малое расстояние Δx, то работа, произведенная силой над телом, равнялась бы x-компоненте силы, умноженной на Δx (если Δx достаточно мало), и должна была бы быть равна изменению потенциальной энергии при переходе от одной точки к другой:

$$\Delta W = -\Delta U = F_x \Delta x. \qquad (14.9)$$

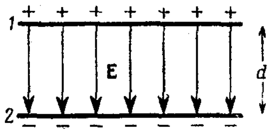
Мы просто применили формулу $\int \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} = -\Delta U$ для *очень малых* расстояний. Теперь разделим на Δx и обнаружим, что сила равна

$$F_x = -\frac{\Delta U}{\Delta x}. \qquad (14.10)$$

Конечно, это не совсем точно. На самом деле нам нужно перейти в (14.10) к пределу при Δx, стремящемся к нулю, потому что (14.10) *точно* соблюдается только для бесконечно малых Δx. Мы узнаем в правой части (14.10) производную U по x и хотим написать $-dU/dx$. Но U зависит и от x, и от y, и от z, и для такого случая математики придумали другое обозначение, которое рассчитано на то, чтобы напоминать нам, что надо быть очень осторожным, дифференцируя такую функцию. Этот символ напоминает, что *только* x считается *изменяющимся*, а y и z — нет. Вместо d они просто пишут «6 навыворот», или ∂. (По-моему, когда начинаешь изучать дифференциальные исчисления, то вообще лучше работать с ∂, а не с d; d всегда хочется сократить, а вот на ∂ как-то рука не поднимается!) Итак, они пишут $\partial U/\partial x$, а иногда в припадке строгости, желая быть *очень* бдительными, они ставят за ∂x скобку с маленькими y, z внизу $(\partial U/\partial x)_{yz}$, что означает: «Продифференцируй U по x, считая y и z постоянными». Но мы чаще всего не будем отмечать, что́ осталось постоянным, из контекста это всегда можно понять. Но зато *всегда* будем писать ∂ вместо d как предупреждение о том, что эта производная берется при постоянных значениях прочих переменных. Ее называют *частной производной*, т. е. производной, для вычисления которой меняют часть переменных, x.

Итак, мы обнаруживаем, что сила в направлении x равна минус частной производной U по x:

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x}. \qquad (14.11)$$



Фиг. 14.5. Поле между параллельными пластинами.

Точно так же и сила в направлении y получается дифференцированием U по y при постоянных x и z, а третья составляющая силы опять-таки есть производная по z при x и y постоянных:

$$F_y = -\frac{\partial U}{\partial y}, \qquad F_z = -\frac{\partial U}{\partial z}. \tag{14.12}$$

В этом и состоит способ получать силу из потенциальной энергии. *Поле* получается из *потенциала* в точности так же:

$$C_x = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}, \qquad C_y = -\frac{\partial \Psi}{\partial y}, \qquad C_z = -\frac{\partial \Psi}{\partial z}. \tag{14.13}$$

Заметим, кстати, что существует и другое обозначение (впрочем, пока оно нам не понадобится). Так как **C** есть вектор с компонентами x, y, z, то символы $\partial/\partial x$, $\partial/\partial y$, $\partial/\partial z$, дающие x-, y-, z-компоненты поля, чем-то напоминают векторы. Математики изобрели знаменитый символ ∇, или grad, называемый «градиентом»; это не величина, а оператор, он делает из скаляра вектор. У него есть три составляющие: x-компонента этого grad есть $\partial/\partial x$, y-компонента — $\partial/\partial y$, а z-компонента — $\partial/\partial z$, и мы можем позабавиться, переписав наши формулы в виде

$$\mathbf{F} = -\nabla U, \quad \mathbf{C} = -\nabla \Psi. \tag{14.14}$$

Глядя на ∇, мы мгновенно узнаем, что наши уравнения векторные; но на самом деле уравнение (14.14) означает в точности то же, что и (14.11) и (14.12); просто это другой способ записи. Не желая писать каждый раз три уравнения, мы пишем одно лишь ∇U.

Еще один пример полей и потенциалов связан с электричеством. В этом случае сила, действующая на неподвижное тело, равна заряду, умноженному на поле: $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$. (В x-составляющую силы входят, вообще говоря, и члены, которые зависят от магнитного поля. Но из уравнения (12.10) легко увидеть, что сила, действующая на частицу со стороны магнитных полей, всегда направлена поперек поля и поперек ее скорости. Благодаря этому свойству магнетизм *не производит никакой работы* над движущимся зарядом, потому что сила перпендикулярна перемещению. Значит, вычисляя кинетическую энергию в электрическом и магнитном полях, можно пренебречь вкладом магнитного поля, так как оно не изменяет кинетической энергии.) Положим, что имеется только электрическое поле. Тогда мы можем рассчитать энергию или произведенную работу точно таким же способом, как и для тяготения: вычислить величину φ, равную минус интегралу от $\mathbf{E}\cdot d\mathbf{s}$ от произвольной фиксированной точки P до точки, в которой вычисляется потенциал; тогда потенциальная энергия в электрическом поле равна просто произведению заряда на эту величину φ:

$$\varphi(\mathbf{r}) = -\mathbf{E}\cdot d\mathbf{s},$$
$$U = q\varphi.$$

В качестве примера рассмотрим две параллельные металлические пластины с поверхностным зарядом $\pm\sigma$ (на единицу площади) каждая. Такая штука называется плоским конденсатором. Мы уж убедились раньше, что снаружи пластин сила равна нулю, а между ними существует постоянное электрическое поле. Оно направлено от плюса к минусу и равно σ/ε_0 (фиг. 14.5). Мы хотим знать, какую работу надо совершить, чтобы перенести заряд от одной пластины к другой. Работа равна интегралу от (Сила)$\cdot$($d\mathbf{s}$). Его можно записать как произведение заряда на значение потенциала на пластине *1* минус та же величина на пластине *2*:

$$W = \int_1^2 \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} = q(\varphi_1 - \varphi_2).$$

Интеграл здесь легко вычислить, так как сила постоянна, и если обозначить толщину конденсатора d, то интеграл равен

$$\int_1^2 \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} = \frac{q\sigma}{\varepsilon_0}\int_1^2 dx = \frac{q\sigma d}{\varepsilon_0}.$$

Разница в потенциалах $\Delta\varphi = \sigma d/\varepsilon_0$ называется *напряжением* и φ измеряют в вольтах. Когда мы говорим, что пара пластин заряжена до определенного напряжения, мы хотим этим сказать, что разность электрических потенциалов двух пластин равна стольким-то вольтам. У конденсатора, сделанного из двух параллельных пластин с поверхностным зарядом $\pm\sigma$, напряжение (или разность потенциалов этой пары пластин) равно $\sigma d/\varepsilon_0$.

НЕКОТОРЫЕ ПОСТОЯННЫЕ

Число Авогадро	$N = 6{,}0249 \cdot 10^{23}$ *молекул/г-моль*
Скорость света	$c = 2{,}99793 \cdot 10^{10}$ *см/сек*
Заряд электрона	$e = 4{,}80286$ *эл-стат. ед.* $= 1{,}6021 \cdot 10^{-9}$ *кулон*
Постоянная Планка	$\hbar = 6{,}5817 \cdot 10^{-22}$ *Мэв·сек* $= 1{,}054 \cdot 10^{-27}$ *эрг·сек*
Масса электрона	$m_e = 0{,}511006$ *Мэв*
Масса протона	$M = 1836{,}12\ m_e$
1 *кюри*	$3{,}7 \cdot 10^{10}$ распадов в секунду
1 год	$3{,}1536 \cdot 10^{7}$ *сек* ($\approx \pi \cdot 10^{7}$ *сек*)
Ускорение силы тяжести	$980{,}67$ *см/сек*^{2}
1 атмосфера	$1033{,}2$ *г/см*^{2}

ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ЧАСТИЦЫ,

	Символ	Масса, *Мэв*	Время жизни, *сек*
ЛЕПТОНЫ			
Нейтрино	ν_e, $\tilde{\nu}_e$	0	
и			Стабильны
антинейтрино	ν_μ, $\tilde{\nu}_\mu$	0	
Электрон	e^+, e^-	0,511006 $\pm$0,000002	
Мюон	μ^+, μ^-	105,659 $\pm$0,002	$2{,}2\cdot 10^{-6}$
МЕЗОНЫ			
Пион	π^+, π^-	139,60 $\pm$0,05	$2{,}55\cdot 10^{-8}$
	π^0	135,01 $\pm$0,05	$1{,}80\cdot 10^{-16}$
Каон	K^+, K^-	493,8 $\pm$0,2	$1{,}229\cdot 10^{-8}$
	K_1^0	498,0 $\pm$0,5	$0{,}92\cdot 10^{-10}$
	K_2^0		$5{,}62\cdot 10^{-8}$

ИХ МАССЫ И ВРЕМЕНА ЖИЗНИ

	Символ	Масса, *Мэв*	Время жизни, *сек*
БАРИОНЫ			
Нуклоны и антинуклоны	$p, \bar{p}$	938,256 $\pm 0,005$	Стабильны
	$n, \bar{n}$	939,550 $\pm 0,005$	$1,01 \cdot 10^{3}$
Гипероны и антигипероны	$\Lambda, \bar{\Lambda}$	1115,40 $\pm 0,11$	$2,62 \cdot 10^{-10}$
	$\Sigma^{+}, \overline{\Sigma^{+}}$	1189,41 $\pm 0,14$	$0,79 \cdot 10^{-10}$
	$\Sigma^{0}, \overline{\Sigma^{0}}$	1192,4 $\pm 0,3$	$<10^{-14}$
	$\Sigma^{-}, \overline{\Sigma^{-}}$	1197,08 $\pm 0,19$	$1,58 \cdot 10^{-10}$
	$\Xi^{0}, \overline{\Xi^{0}}$	1314,3 $\pm 0,1$	$3,1 \cdot 10^{-10}$
	$\Xi^{-}, \overline{\Xi^{-}}$	1320,8 $\pm 0,2$	$1,74 \cdot 10^{-10}$
	$\Omega^{-}, \overline{\Omega^{-}}$	1675 ± 3	$\sim 0,7 \cdot 10^{-10}$