

# ЗАОЧНАЯ ФИЗМАТШКОЛА

ИЗБРАННЫЕ ЗАДАНИЯ  
РОССИЙСКИХ И  
ЗАРУБЕЖНЫХ ЭКЗАМЕНОВ И  
ОЛИМПИАД

# Графы

Граф — множество точек, соединенных ребрами:

$$G = (V, E)$$

$$E \subseteq V \times V$$

1. В деревне 9 домов. Известно, что у Гоши соседи Иван и Роман, Максим сосед Ивану и Михаилу, Виктор – Алексею и Андрею, а также по соседству живут Константин с Андреем, Иван с Михаилом, Константин с Алексеем, Михаил с Романом и больше соседей в означенной деревне нет (соседними считаются дворы, у которых есть общий участок забора). Может ли Гоша огородами пробраться к Андрею за яблоками?

2. В стране Цифра есть 9 городов с названиями 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Путешественник обнаружил, что два города соединены авиалинией в том и только в том случае, если двузначное число, составленное из цифр-названий этих городов, делится на 3. Можно ли добраться из города 1 в город 9?
3. В некотором государстве 6 городов и 10 автодорог, каждая из которых связывает какие-то два города. Между городами устанавливается авиационное сообщение, исходя из принципа экономии: авиационная линия между двумя городами устанавливается тогда и только тогда, когда автомобильная дорога между этими городами отсутствует. Сколько авиалиний будет проведено?

Степень вершины — количество ребер, выходящих из вершины.

$$S(V) = |\{(V, U) : (V, U) \in E\}|$$

4. В стране 1329 городов, из каждого выходит по 4 дороги. Сколько всего дорог в стране?
5. Докажите, что не существует графа с пятью вершинами, степени которых равны 4, 4, 4, 4, 2.
6. Вася считает, что в его классе у всех разное число друзей-одноклассников. Не ошибается ли он?

# Домашнее задание

1. Может ли сумма степеней всех вершин быть нечетным числом? Если да, то приведите пример графа. Если нет, докажите.
2. Чему равно количество всех ребер в полном графе из 50 вершин?
3. Существует ли граф со следующими степенями вершин: 3, 2, 2, 2?
4. Петя заметил, что у всех его 25 одноклассников различное число друзей в этом классе. Сколько друзей у Пети? (Укажите все решения)