ОКСБРИДЖ
АЛЬБИОН

ЗАОЧНАЯ ФИЗМАТШКОЛА

ИЗБРАННЫЕ ЗАДАНИЯ РОССИЙСКИХ И ЗАРУБЕЖНЫХ ЭКЗАМЕНОВ И ОЛИМПИАД

+7 495 650-99-95
+7 495 694-36-00
+7 925 505-24-42
+7 916 151-25-94
info@albioncom.ru

Занятие №6 (11.11.2023)

Кружок по математике

Несколько слов о домашнем задании

Задача №1. Сложная задача (04.11)

Учитель задал на уроке сложную задачу. В результате, число мальчиков решивших эту задачу, оказалось равным числу девочек, не решивших её. Кого в классе больше: учеников, решивших задачу, или девочек? Почему?

Задача №1. Сложная задача (04.11)

Решение:

Р – количество тех, кто не решил

М = МР + МН – количество мальчиков

Д = ДР + ДН – количество девочек

Р = МР + ДР

По условию, МР = ДН = х, тогда:

Р = х + ДР

Д = ДР + х

То есть, учеников, решивших задачу столько же, сколько и девочек

Монета и кубик

А) Монету подбросили пять раз. Сколько разных последовательностей из орлов и решек могло при этом получиться? (Монета может упасть орлом или решкой).

Б) На гранях игрального кубика написаны натуральные числа от 1 до 6. Игральный кубик бросили три раза. Сколько разных последовательностей чисел могло при этом получиться?

Challenge 251: Chatty Classmates

Mrs Green is teaching a class of eight students, which she knows consists of four pairs of “Best Friends”. She needs to divide them into pairs for an activity, but she also knows that if she puts any pair of best friends together then they will chat all lesson and get no work done.

How many ways can she put them into productive pairs?

Блиц-задача

Соревнование по бегу

Алёша, Боря, Ваня и Гриша соревновались в беге. На вопрос, кто какое место занял, они ответили:

Алёша: Я не был ни первым, ни последним.

Боря: Я не был последним.

Ваня: Я был первым.

Гриша: Я был последним.

Известно, что трое сказали правду, а один соврал. Кто победил в соревновании? Кто сказал неправду?

Шестое занятие. Комбинаторика + Теория вероятностей

Выборки

Если из множества, содержащего n элементов, каким-то способом выбирают k элементов ($k \leq n$), то говорят, что из этого множества *произведена выборка* объема k (все элементы множества считаются различными).

Если нас интересует порядок, в котором выбирались эти элементы, то говорят об *упорядоченной выборке*, а если нет – о *неупорядоченной*.

В подвале у людоеда

У людоеда в подвале томятся 25 пленников.

а) Сколькими способами он может выбрать трех из них себе на завтрак, обед и ужин?

б) А сколько есть способов выбрать троих, чтобы отпустить на свободу?

Размещения

Всякая упорядоченная выборка объема k из множества, состоящего из n элементов, называется размещением из n элементов по k элементов и обозначается через $\boldsymbol{A_n^k}$.

Символ A_n^k читается: «а из n по k» или «число размещений из n по k». А – первая буква французского слова Arrangement, что обозначает «размещение, приведение в порядок».

$$A_n^k = n(n-1)\ldots(n-k+1), \text{ где } \mathbf{1} \le \boldsymbol{k} \le \boldsymbol{n}\,.$$

Размещения

Всякая упорядоченная выборка объема k из множества, состоящего из n элементов, называется размещением из n элементов по k элементов и обозначается через A_n^k .

$$A_n^k = n(n-1)\dots(n-k+1)$$, где $1 \le k \le n$.

Задача. Сколько четырехбуквенных «слов» можно составить из карточек «в», «е», «ч», «н», «о», «с», «т», «ь»?

N = 8*7*6*5

$$A_8^4 = 8 * 7 * 6 * 5$$

Размещения

Заметим также, что A_n^k можно записать и по-другому (k<n):

$$A_n^k = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)\cdot(n-k)!}{(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Чтобы эта формула действовала и при *k = n*, примем по определению, что **0!=1.**

$$\mathrm{A}_8^4 = \frac{8!}{(8-4)!} = 8 * 7 * 6 * 5$$

n! = 1·2·…·n — произведение всех натуральных чисел от 1 до n (читается «эн факториал»).

Бильярдные шары

Сколькими способами 15 пронумерованных бильярдных шаров могут распределиться по шести лузам?

Размещения с повторениями

Число способов выбрать упорядоченные k элементов из n, если им разрешено повторяться, называется *числом размещений с повторениями* и обозначается как $\bar{A}_n^k$.

Выведите формулу для нахождения $\bar{A}_n^k$.

Размещения с повторениями

Число способов выбрать упорядоченные k элементов из n, если им разрешено повторяться, называется *числом размещений с повторениями* и обозначается как $\bar{A}_n^k$.

$$\bar{A}_n^k = n^k$$

Перестановки

Размещение из n элементов по n называется *перестановкой из n элементов* и обозначается через $\boldsymbol{P_n}$.

Символ P_n происходит от французского слова Permutation - «перестановка».

$$P_n = A_n^n = n(n-1)\ldots\cdot 2\cdot 1 = n!$$

n! = 1·2·…·n — произведение всех натуральных чисел от 1 до n (читается «эн факториал»).

Перестановки

Размещение из n элементов по n называется *перестановкой из n элементов* и обозначается через $\boldsymbol{P_n}$.

$$P_n = A_n^n = n(n-1)\ldots\cdot 2\cdot 1 = n!$$

Задача. У нас есть набор из восьми карточек с буквами «в», «е», «ч», «н», «о», «с», «т», «ь». Вопрос: сколько восьмибуквенных «слов» можно составить из этих карточек?

Десятитомник

Сколькими способами можно расставить на книжной полке десятитомник Пушкина так, чтобы том 2 стоял рядом с томом 1 и справа от него?

Сочетания

Всякая неупорядоченная выборка объема k из множества, состоящего из n элементов ($k \le n$), называется *сочетанием из n элементов по k элементов* и обозначается через $\boldsymbol{C_n^k}$.

Символ C_n^k читается: «це из п по k» или «число сочетаний из n по k». C – первая буква французского слова Combinaison – «сочетание».

Сочетания

Всякая неупорядоченная выборка объема k из множества, состоящего из n элементов ($k \le n$), называется *сочетанием из n элементов по k элементов* и обозначается через $\boldsymbol{C_n^k}$.

Выведем формулу для нахождения C_n^k. Из любого набора, содержащего k элементов, можно с помощью перестановок получить k! упорядоченных выборок объема k, поэтому

$$A_n^k = C_n^k \cdot k!,$$

$$C_n^k = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Хоккейная команда

Хоккейная команда состоит из 2 вратарей, 7 защитников и 10 нападающих. Сколькими способами тренер может образовать стартовую шестерку, состоящую из вратаря, двух защитников и трех нападающих?

Теория вероятностей

Математик проходит досмотр в аэропорту. Внезапно в его багаже обнаруживают бомбу. Он объясняет: «Видите ли, вероятность того, что на борту окажется бомба, равна 1/1000. А вероятность того, что в самолёте будут две бомбы, уже 1/1000000. Так что я решил подстраховаться…»

Теория вероятностей

Теория вероятностей — это раздел математики, который изучает закономерности случайных явлений: случайные события, случайные величины, их свойства и операции над ними.

Французские математики *Блез Паскаль* и *Пьер Ферма* анализировали азартные игры и исследовали прогнозы выигрыша. Тогда они заметили первые закономерности случайных событий на примере бросания костей и сформулировали теорию вероятностей.

Теория вероятностей

Мысленно проведем некоторый эксперимент - бросаем монетку.

Возможные варианты результатов эксперимента назовём *элементарными исходами*. Так, «монетка упала решкой» — это элементарный исход.

Некоторые из этих исходов объявлены ***благоприятными***:

В игре бросают кубик; выигрышем считается выпадение пятёрки или шестёрки. Сколько (примерно) выигрышей будет в длинной серии из N игр?

Здесь благоприятным исходом будет выпадение пятёрки или шестёрки.

Теория вероятностей

Мы предполагаем, что в длинной серии опытов все исходы встречаются примерно поровну. Исходя из этого, мы подсчитываем, в какой доле случаев (примерно) исход будет благоприятным. Пусть всего исходов n, а благоприятных исходов k. Тогда на каждый исход приходится примерно $1/n$ всех случаев, и благоприятный исход будет примерно в k/n всех случаев.

Определение. ***Вероятностью*** называется отношение числа благоприятных исходов к общему числу равновозможных исходов.

Теория вероятностей

Определение. ***Вероятностью*** называется отношение числа благоприятных исходов к общему числу равновозможных исходов.

$$P(A) = \frac{\text{количество благоприятных исходов}}{\text{общее число исходов}}$$

Вероятность любого события заключена *между нулём и единицей*. Вероятность равна нулю, если благоприятных исходов нет вовсе (*невозможное событие*). Вероятность равна единице, если все исходы благоприятны (*достоверное событие*).

Пусть у нас есть колода карт, и мы достаем из неё одну карту.

Достоверное событие – мы вытащили любую карту любой масти.

Невозможное событие – мы вытащили проездной на метро.

Случайное событие – мы вытащили туза.

Орёл или решка

Монету подбрасывают два раза. Всего имеется 4 возможных исхода (все они равновероятны): орёл – орёл, орёл – решка, решка – орёл, решка – решка. Какова вероятность выпадения

a) двух орлов;

b) орла и решки?

Спасибо за внимание!

Совсем скоро презентация и домашнее задание появятся на гугл-диске и на сайте)
Домашнее задание присылайте на почту - info@oxbridge.ru
В теме письма указывайте фамилию, предмет и номер группы
Не забудьте отправить ДЗ не позднее, чем за 2 дня до начала следующего занятия (до четверга включительно)

Хороших выходных!

Использованные материалы

- Архив занятий Малого Мехмата МГУ http://mmmf.msu.ru/archive/
- Задачи с сайта https://problems.ru/
- Задачи с сайта https://www.kingsmathsschool.com/weekly-maths-challenge (King's Maths School)
- Коновалов С.П. "Материалы ЗФТШ"
- А. Шень, “Вероятность: примеры и задачи”