



ЗАОЧНАЯ ФИЗМАТШКОЛА

ИЗБРАННЫЕ ЗАДАНИЯ
РОССИЙСКИХ И
ЗАРУБЕЖНЫХ ЭКЗАМЕНОВ И
ОЛИМПИАД

- +7 495 650-99-95
- +7 495 694-36-00
- +7 925 505-24-42
- +7 916 151-25-94
- info@albioncom.ru

Занятие №2

Кружок по математике



Дерб

Давным-давно островитянин Дерб сказал своим друзьям: - Вчера мой сосед заявил мне, что он лжец! Кем является Дерб — рыцарем или лжецом?

Решение: 1. Если сосед Дерба - рыцарь, тогда то, что он заявил Дербу, должно быть правдой, то есть он должен быть лжецом. Но мы предположили, что он рыцарь. Значит, такого не может быть. 2. Если сосед Дерба - лжец, то он сказал Дербу неправду, то есть неправда, что он лжец. Снова противоречие.

Итак, если бы сосед Дерба сказал ему, что он лжец, то в любом случае получилось бы противоречие, то есть, такого быть не могло. Вывод: сосед Дерба этого вообще не говорил! Значит, Дерб лжёт.

Три друга и три факультета

Решение: Предположим, что Роман действительно не физик, тогда Пётр математик (2 утв.). Но если Пётр математик, то Сергей не физик (1 утв.). Получается никто не физик – противоречие.

Тогда Роман - физик. Из 3 условия получаем, что Сергей – математик (иначе – Роман = химик - неверно), и, соответственно, Пётр – химик.

СПИЧКИ И МАТЕМАТИКА

1. Переложите одну спичку, чтобы равенство стало верным.

$$| + | = |$$

2. Разрешается переложить одну спичку. Постарайтесь получить как можно меньший результат, а потом сравните с ответом.

$$17 + 71$$

3. Какое наименьшее количество спичек нужно переложить, чтобы равенство стало верным?

$$19 + 8 = 69$$

4. Какое наименьшее количество спичек нужно переложить, чтобы равенство стало верным?

$$| + | = | \square$$

Художник Инга Коржнева

1. Вот два различных примера (во втором используются римские цифры):

$$| = | \quad | = | \quad || + | = |$$

2. Можно получить -17171 :

$$-17 + 71$$

3. Ни одной: равенство верное, если посмотреть на него, перевернув журнал вверх ногами.

4. Ни одной, если считать, что равенство записано в двоичной системе счисления.

Тим и Том

Рыцари всегда говорят только правду, лжецы – всегда лгут.

Однажды в четверг после дождя между островитянами Тимом и Томом произошел следующий диалог: - Ты можешь сказать, что я рыцарь, - гордо заявил Тим. - Ты можешь сказать, что я лжец, - грустно ответил ему Том. Кем являются Тим и Том?

Напитки и ёмкости

В чашке, стакане, кувшине и банке находятся молоко, лимонад, квас и вода. Известно, что вода и молоко не в чашке; сосуд с лимонадом стоит между кувшином и сосудом с квасом; в банке не лимонад и не вода; стакан стоит около банки и сосуда с молоком. В какой сосуд налита каждая из жидкостей?

Напитки и ёмкости

	Чашка	Стакан	Кувшин	Банка
Молоко				
Лимонад				
Квас				
Вода				

Второе занятие.

Четность и нечетность



Четность и нечетность

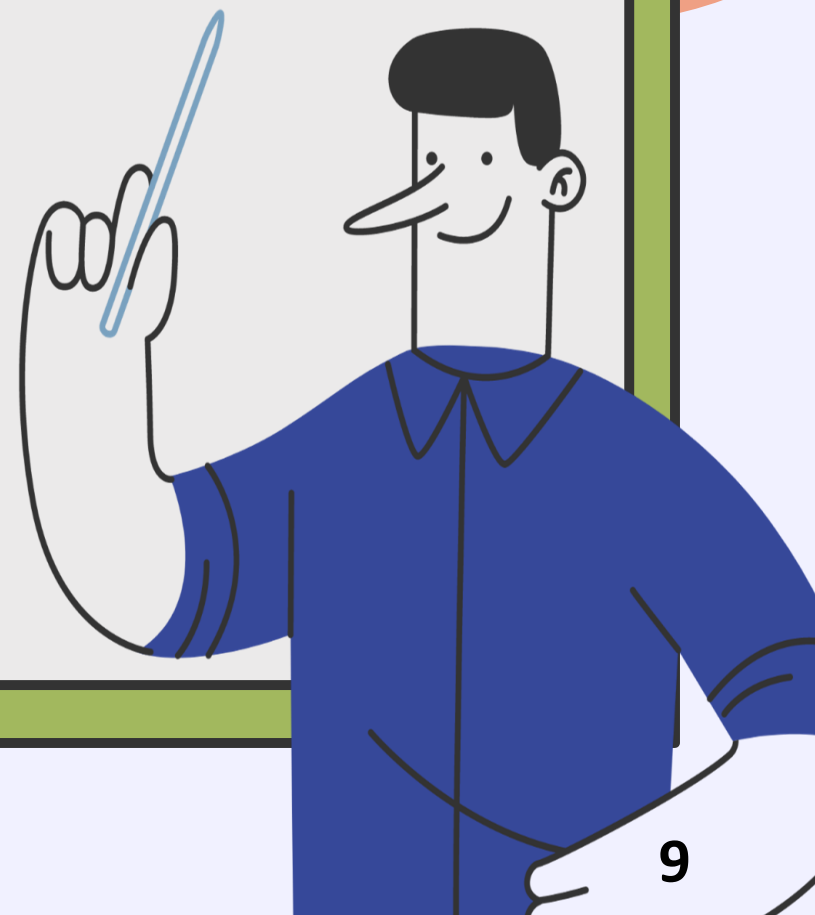
Чётными мы называем те числа, которые делятся нацело на 2. Все остальные числа мы называем **нечётными**.

Признак делимости на 2

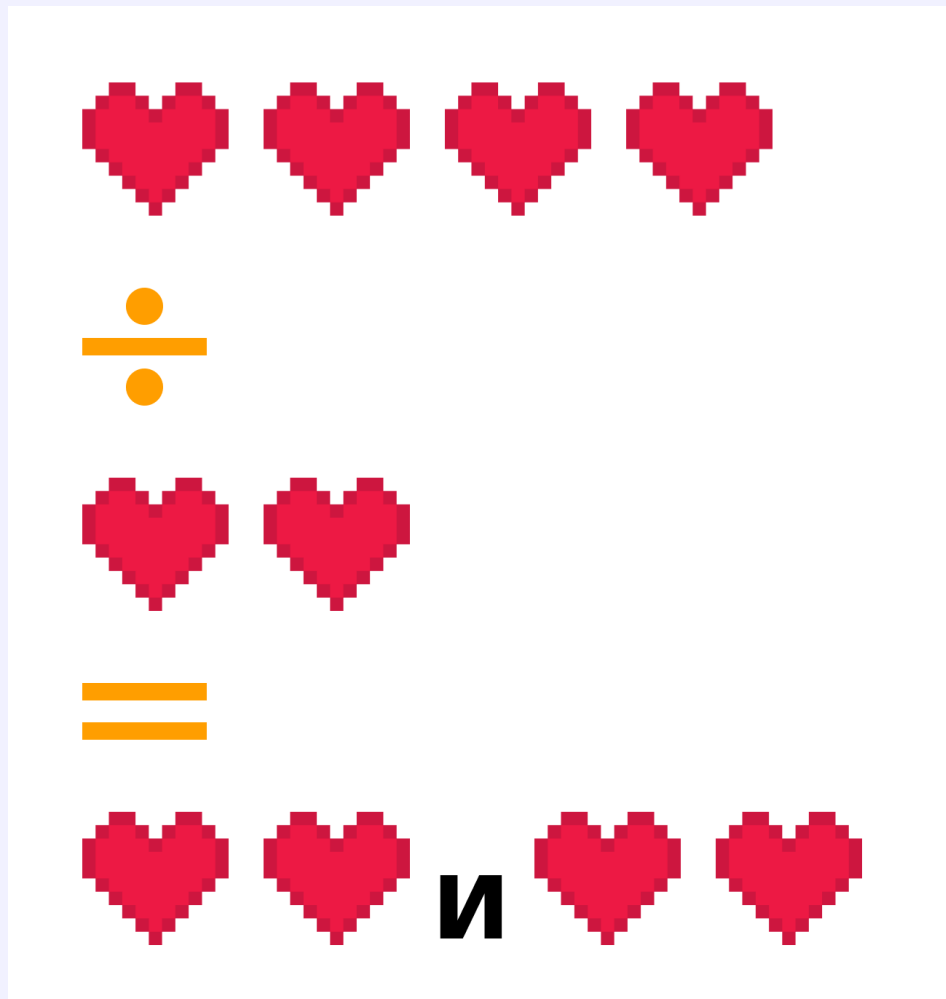
Число делится на 2, если его последняя цифра четная.

Если число оканчивается на 0, 2, 4, 6, 8, то это число четное.

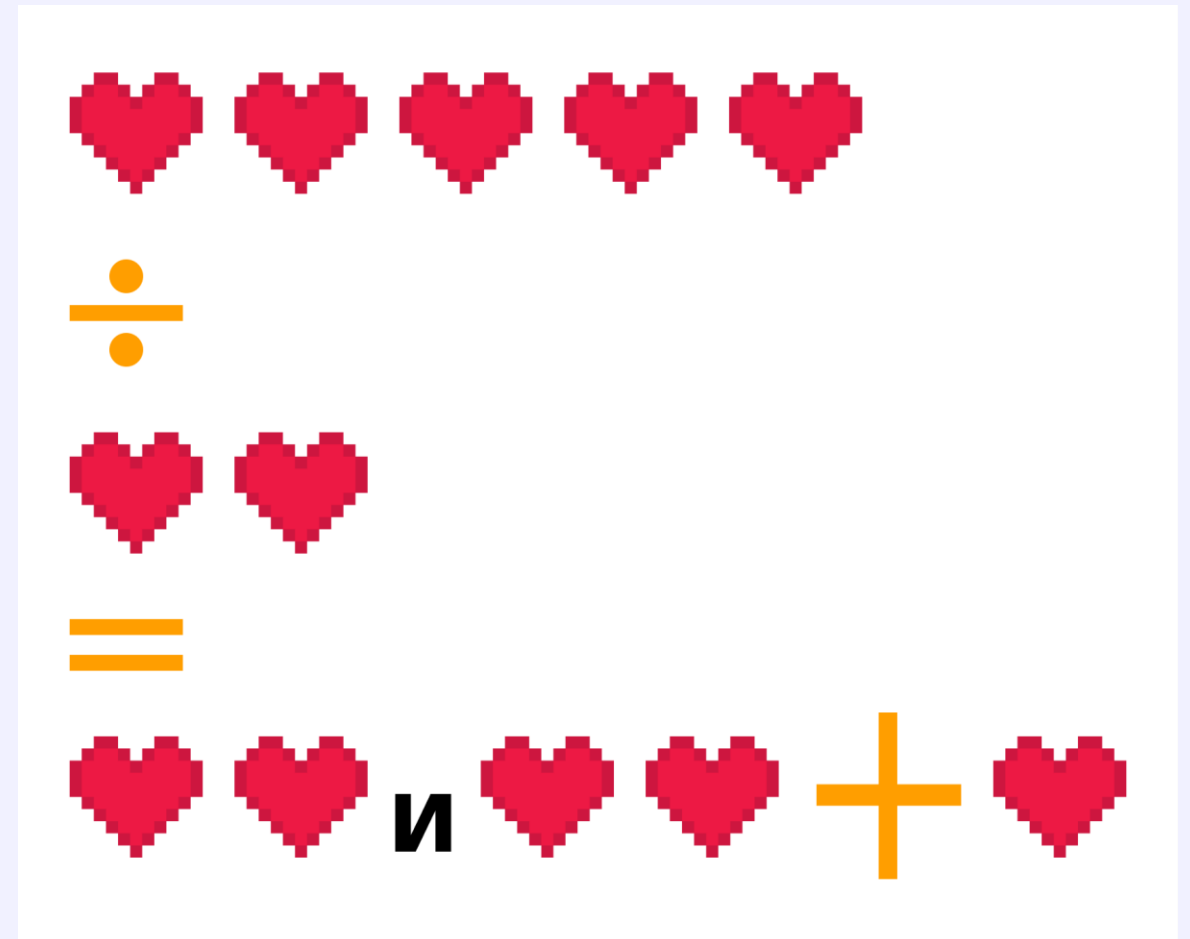
Если число оканчивается на 1, 3, 5, 7, 9, то это число нечетное.



Четное число — это число,
которое делится нацело на 2.



Нечетное число — это число,
которое делится на 2 с остатком.



Обед математика

Как-то математик заказал двойной обед. Он не знал, сколько стоит обед. Но едва взглянув на чек, он сказал кассиру: «Вы ошиблись!» Как он это определил?



Заполнение таблички

$Ч + Ч =$	$Ч * Ч =$	$Н * \dots * Н * Ч * Н * \dots * Н =$
$Ч + Н =$	$Ч * Н =$	$Н * \dots * Н * \dots * Н =$
$Н + Н =$	$Н * Н =$	$Н + \dots + Н + \dots + Н =$

Ч – ЧЕТНОЕ

Н – НЕЧЕТНОЕ

Задумали два числа

Произведение двух чисел умножили на их сумму. Могло ли в результате получиться число 3171?

Путешествие Белого Рыцаря

Путешествуя по лесу, Белый Рыцарь изобрёл новый способ перелезания через калитку. Он нашёл сад с закрытой калиткой, окружённый забором, и стал проверять этот способ. Вернувшись в лес, Белый Рыцарь заявил, что ему удалось перелезть через калитку 25 раз. Докажите, что он ошибся.

Суд над Гарри Поттером

Верховный суд магов Визенгамот насчитывает 50 волшебников. На слушании по делу Гарри Поттера министр Фадж заявил, что после голосования с перевесом в 7 голосов было принято решение признать Гарри виновным в незаконном использовании магии. Однако Дамблдор заметил, что проголосовали все 50 волшебников, а потому Фадж, должно быть, ошибается. Прав ли Дамблдор?

Вова задумал число

Вова задумал число, несколько раз прибавил к нему 28 и несколько раз отнял 16. Затем он отнял из получившегося числа первоначально задуманное и получил 33. Докажите, что Вова ошибся.

Кусты малины

Восемь кустов малины растут в ряд. Известно, что число ягод, растущих на любых двух соседних кустах, отличается на 1. Может ли общее количество ягод равняться 2011?



Числа на доске

В классе 18 мальчиков и 15 девочек. Каждый мальчик, заходя в класс, записал на доске число 4 или 6, а каждая девочка — число 5 или 8. Сумма всех записанных на доске чисел оказалась чётной. Докажите, что хотя бы одна девочка записала число 8.



Островитяне в квадрате

В клетках квадрата 4×4 стоят островитяне. В некоторый момент каждый из них произнес: «Во всех соседних со мной клетках стоят лжецы». Какое наибольшее количество лжецов могло быть среди них?

Спасибо за внимание!

Совсем скоро к вам на почту придёт домашнее задание

Не забудьте отправить его не позднее, чем за 2 дня до начала следующего занятия (до четверга включительно)

Если есть вопросы – пишите на почту shaulskaya.m@inbox.ru



Тим и Том

Решение: Пусть Тим — рыцарь, то есть говорит правду. Тогда Том может сказать, что Тим рыцарь. Поскольку это правда, то получается, что Том может сказать правду, значит, Том тоже рыцарь. Но тогда сказанное Томом тоже должно быть правдой, но на самом деле Тим не сможет сказать, что он лжец, потому что он не лжец, а Тим не врёт. Противоречие.

Значит, Тим — лжец. Тогда Том не может сказать, что он рыцарь, то есть Том не может сказать неправду. Значит, Том рыцарь. И действительно, слова Тома — правда, потому что Тим может соврать, сказав, будто Том лжец.

Напитки и ёмкости

Решение:

	Чашка	Стакан	Кувшин	Банка
Молоко	-	-	+	-
Лимонад	+		-	-
Квас			-	+
Вода	-	+		-

В чашке — лимонад, в стакане — вода,
в кувшине — молоко, в банке — квас.

Обед математика

Решение: Пусть обычный обед стоит n рублей. А математик заказал двойной обед. Значит, он должен заплатить за него вдвое больше, то есть $2 \times n$ рублей. Число $2 \times n$ — четное, поскольку оно делится на 2. Должно быть, математик увидел на чеке нечетную сумму и понял, что кассир ошибся.

Заполнение таблички

Ответ:

$Ч + Ч = Ч$	$Ч * Ч = Ч$	$Н * \dots * Н * Ч * Н * \dots * Н = Ч$
$Ч + Н = Н$	$Ч * Н = Ч$	$Н * \dots * Н * \dots * Н = Н$
$Н + Н = Ч$	$Н * Н = Н$	$Н + \dots + Н + \dots + Н = Ч \text{ или } Н$

Ч – ЧЕТНОЕ

Н – НЕЧЕТНОЕ

Зависит от количества слагаемых
Если количество слагаемых четно,
и нечетна в противном случае.

Задумали два числа

Решение: Обозначим наши числа a и b . Тогда интересующая нас величина равна $a \cdot b \cdot (a+b)$.

Рассмотрим два случая:

1. Пусть a и b имеют одинаковую четность. Тогда их сумма четна. А значит, и наша величина получится четной, так как делится на эту сумму, и, соответственно, на 2.

2. Пусть a и b разной четности. Тогда их произведение четно (так как либо a , либо b четно). А значит, наша величина получится четной, так как четно $a \cdot b$.

Тем самым в обоих случаях интересующая нас величина четна, тогда как число 3171 нечетно.

Путешествие Белого Рыцаря

Решение: Заметим, что своё заявление Белый Рыцарь сделал, находясь в лесу, а не в саду с закрытой калиткой.

Чтобы посетить и покинуть один сад, Рыцарю необходимо сделать 2 перелезания. Соответственно, посетив n садов, Рыцарь выполнит $2n$ перелезаний – четное число перелезаний.

Белый Рыцарь заявил, что ему удалось перелезть через калитку 25 раз, но 25 – нечетное число. Получается, Белый Рыцарь ошибся.

Суд над Гарри Поттером

Решение:

Пусть x – голосов за невиновность Гарри Поттера, тогда $(x+7)$ – голосов тех, кто считает волшебника виновным.

$$x + x + 7 = 50$$

$2x = 43$ – неверно, т.к. 43 на 2 не делится.

Вова задумал число

Решение: 28 и 16 – четные числа. Нетрудно заметить, что в процессе прибавления или вычитания четного числа мы сохраняем исходную четность – $N + Ч = N$ или $Ч + Ч = Ч$.

Тогда при выполнении последнего действия получаем:

Если задуманное число было нечетным – $N - N = Ч$

Если было четным – $Ч - Ч = Ч$

Получается, что в любом случае будет четное число, а 33 – нечетное, следовательно, Вова ошибся.

Кусты малины

Решение: Если число ягод на двух соседних кустах отличается на 1, то количество ягод на соседних кустах имеет разную четность.

Поэтому возможны два случая:

Ч Н Ч Н Ч Н Ч Н

Н Ч Н Ч Н Ч Н Ч

В обоих случаях общее количество ягод на всех кустах равно $Ч + Ч + Ч + Ч + Н + Н + Н + Н = Ч + Ч = Ч$, то есть четно, тогда как число 2011 нечетно.

Использованные материалы

- Архив занятий Малого Мехмата МГУ <http://mmmf.msu.ru/archive/>
- Задачи с сайта <https://problems.ru/>